**Лекция**

**Тема: Логарифмические уравнения**

**План**

1. Определение логарифмического уравнения

2. Решение простейших уравнений

3.Потенцирование.

4. Cведение уравнений к виду log a f(x) = log a g(x) с помощью свойств логарифмов по одному основанию.

5.Уравнения вида Alog a f(x) + Blog b g(x) + C = 0.

6. Введение новой переменной

**Определение логарифмического уравнения**

Уравнение, содержащее переменную под знаком логарифма, называется логарифмическим. Простейшим примером логарифмического уравнения служит уравнение вида loga x = b (где а>0, и а ≠1).

Функция у=log a x является возрастающей (или убывающей) на промежутке

(0; +∞) и принимает на этом промежутке все действительные значения. По теореме о корне) для любого b это уравнение имеет корень, и только один.

**Решение простейших уравнений**

Простейшими логарифмическими уравнениями будем называть уравнения следующих видов:

log *a x = b*, *a* > 0, *a* ≠ 1*.*

log *a f*(*x*) *= b*, *a* > 0, *a* ≠ 1*.*

log *f*(*x*)*b = c*, *b* > 0*.*

Эти уравнения решаются на основании определения логарифма:

если log*b a = c*, то*a = bc***.**

Пример 2.1.

Решение. Область определения уравнения *x* > 0. По определению логарифма *x* = 23, *x* = 8 принадлежит области определения уравнения.

Ответ: *x* = 8.

*Уравнения вида*log*a f*(*x*) = *b*, *a* > 0, *a* ≠ 1.

Уравнения данного вида решаются по определению логарифма с учётом области определения функции *f*(*x*). Уравнение равносильно следующей системе



Обычно область определения находится отдельно, и после решения уравнения *f*(*x*) = *ab* проверяется, принадлежат ли его корни области определения уравнения.

Пример 2.2. log3(5х – 1) = 2.

Решение: ОДЗ: 5х – 1 > 0; х > 1/5. log3(5х– 1) = 2, log3(5х – 1) = log332, 5х - 1 =9,  
х = 2. Ответ: 2.

Пример 2.3.



Решение. Область определения уравнения находится из неравенства 2*х*2 – 2*х* – 1 > 0. Воспользуемся определением логарифма:



Применим правила действий со степенями, получим 2*х*2 – 2*х* – 1 = 3. Это уравнение имеет два корня *х* = –1; *х* = 2. Оба полученные значения неизвестной удовлетворяют неравенству 2*х*2 – 2*х* – 1 > 0, т.е. принадлежат области определения данного уравнения, и, значит, являются его корнями.

Ответ. *х*1 = –1, *х*2 = 2.

***Уравнения вида* log*f*(*x*) *b* = *с*, *b* > 0.**

Уравнения этого вида решаются по определению логарифма с учётом области определения уравнения. Данное уравнение равносильно следующей системе



Чаще всего, область определения логарифмического уравнения находится отдельно, и после решения уравнения (*f*(*x*))*c* = *b* или равносильного уравнения



проверяется, принадлежат ли его корни найденной области.

Пример 2.4. log*x*–19 = 2.

Решение. Данное уравнение равносильно системе

Ответ. *x* = 4.

**Потенцирование.**

Суть метода заключается в переходе от уравнения

log *a f*(*x*) = log *a g*(*x*) к уравнению *f*(*x*) = *g*(*x*), которое обычно

*не равносильно* исходному.

***Уравнения вида*  log*a f*(*x*) = log*a g*(*x*) , *а* > 0, *а* ≠ 1.**

На основании свойства монотонности логарифмической функции заключаем, что *f*(*x*) = *g*(*x*).

Переход от уравнения log*a f*(*x*) = log*a g*(*x*) к уравнению *f*(*x*) = *g*(*x*) называется *потенцированием*.

Нужно отметить, что при таком переходе может нарушиться равносильность уравнения. В данном уравнении *f*(*x*) > 0, *g*(*x*) > 0, а в полученном после потенцирования эти функции могут быть как положительными, так и отрицательными. Поэтому из найденных корней уравнения *f*(*x*) = *g*(*x*) нужно отобрать те, которые принадлежат области определения данного уравнения. Остальные корни будут посторонними.

Пример 3.1 log3 (*x*2 – 3*x* – 5) = log3 (7 – 2*x*).

Решение. Область определения уравнения найдётся из системы неравенств



Потенцируя данное уравнение, получаем *х*2 – 3*х* – 5 = 7 – 2*х*,

*х*2 – *х* – 12 = 0, откуда *х*1 = –3, *х*2 = 4. Число 4 не удовлетворяет системе неравенств. Ответ. *х* = –3.

**Cведение уравнений к виду log a f(x) = log a g(x) с помощью свойств логарифмов по одному основанию.**

Если уравнение содержит логарифмы по одному основанию, то для приведения их к виду log a f(x) = log a g(x) используются следующие свойства логарифмов:

* log*b a* + log*b c* = log*b*(*ac*), где *a* > 0; *c* > 0; *b* > 0, *b* ≠ 1,
* log*b a* – log*b c* = log*b*(*a/c*), где *a* > 0; *c* > 0; *b* > 0, *b* ≠ 1,
* *m* log*b a* = log*b a m*, где *a* > 0; *b* > 0, *b* ≠ 1; *m*∈*R*.

  Пример 4. 1. log6 (*x* – 1) = 2 – log6 (5*x* + 3).

Решение. Найдём область определения уравнения из системы неравенств



Применяя преобразования, приходим к уравнению

log6 (*x* – 1) + log6 (5*x* + 3) = 2,

log6 ((*x* – 1)(5*x* + 3)) = 2, далее, потенцированием, к уравнению

(*х* – 1)(5*х* + 3) = 36, имеющему два корня *х* = –2,6; *х* = 3. Учитывая область определения уравнения, *х* = 3. Ответ. *х* = 3.

Пример 4.2. 

Решение. Найдём область определения уравнения, решив неравенство

(3*x* – 1)(*x* + 3) > 0 методом интервалов.

Учитывая, что разность логарифмов равна логарифму частного, получим уравнение log5 (*x* + 3) 2 = 0. По определению логарифма

(*х* + 3) 2 = 1, *х* = –4, *х* = –2. Число *х* = –2 посторонний корень.

Ответ. *х* = –4.

Пример 4. 3. log2 (6 – *x*) = 2log6 *x*.

Решение. На области определения 0 < *x* < 6 исходное уравнение равносильно уравнению 6 – *x* = *x*2, откуда *х* = –3, *х* = 2. Число *х* = –3 посторонний корень.

Ответ. *х* = 2.

**Уравнения вида Alog a f(x) + Blog b g(x) + C = 0.**

Метод потенцирования применяется в том случае, если все логарифмы, входящие в уравнение, имеют одинаковое основание. Для приведения логарифмов к общему основанию используются формулы:









Пример 5.1. 

Решение. Область определения уравнения 1 < *x* < 2. Используя формулу (3), получим 

Так как 3 = log28, то на области определения получим равносильное уравнение (2–*x*)/(*x*–1) = 8, откуда *x* = 10/9. Ответ. *x* = 10/9.

  Пример 5.2. 

Решение. Область определения уравнения *x* > 1. Приведём логарифмы к основанию 3, используя формулу (4).Ответ. *х* = 6.

  Пример 5. 3. 

Решение. Область определения уравнения *x* > –1, *x* ≠ 0. Приведём логарифмы к основанию 3, используя формулу (2). 

Умножим обе части уравнения на log 3(*x* + 1) ≠ 0 и перенесем все слагаемые в левую часть уравнения. Получим (log 3(*x* + 1)–1)2 = 0, откуда log 3(*x* + 1) = 1 и

*x* = 2. Ответ. *x* = 2.***.***

**Введение новой переменной**

Рассмотрим два вида логарифмических уравнений, которые введением новой переменной приводятся к квадратным.





*Уравнения вида******где a* > 0, *a* ≠ 1, *A*, *В*, *С* – *действительные числа*.

Пусть *t* = log*a f*(*x*), *t*∈*R*. Уравнение примет вид *t*2 + *Bt* + *C* = 0.

Решив его, найдём *х* из подстановки *t* = log*a f*(*x*). Учитывая область определения, выберем только те значения *x*, которые удовлетворяют неравенству *f*(*x*) > 0.

Пример 6. 1. lg 2 *x* – lg*x* – 6 = 0.

Решение. Область определения уравнения – интервал (0; ∞).Введём новую переменную *t* = lg *x*, *t*∈*R*.

Уравнение примет вид *t* 2 – *t* – 6 = 0. Его корни *t*1 = –2, *t*2 = 3.

Вернёмся к первоначальной переменной lg *x* = –2 или lg *x* = 3,

*х* = 10 –2 или *х* = 10 3. Оба значения *x* удовлетворяют области определения данного уравнения (*х* > 0).Ответ. *х* = 0,01; *х* = 1000.

Пример 6. 2. 

Решение. Найдём область определения уравнения



Применив формулу логарифма степени, получим уравнение 

Так как *х* < 0, то | *x* | = –*x* и следовательно 

Введём новую переменную *t* = log3 (–*x*), *t*∈*R*. Квадратное уравнение

*t* 2 – 4*t* + 4 = 0имеет два равных корня *t*1,2 = 2. Вернёмся к первоначальной переменной log3 (–*x*) = 2, отсюда –*х* = 9, *х* = –9. Значение неизвестной принадлежит области определения уравнения. Ответ. *х* = –9.

*Уравнения вида* *****где a* > 0, *a* ≠ 1, *A*, *В*, *С* – *действительные числа* , *A*≠0, *В*≠0*.*

Уравнения данного вида приводятся к квадратным умножением обеих частей его на log*a f*(*x*) **≠**0. Учитывая, что log*a f*(*x*)⋅ log*f*(*x*) *a=*1

(свойство log*b a* = 1/ log*a b*), получим уравнение



Замена log*a f*(*x*)=*t, t∈R* приводит его к квадратному *At*2 + C*t* + *B* = 0.

Из уравнений log*a f*(*x*)= *t*1 , log*b f*(*x*)= *t*2 найдем значения *x* и выберем среди них принадлежащие области определения уравнения: *f*(*x*) > 0, *f*(*x*) ≠1.

 Пример.6.3 

Решение. Область определения уравнения находим из условий *x*+2>0, *x*+2 ≠ 1**,** т.е.*x* >–2, *x* ≠ –1**.**Умножим обе части уравнения наlog5(*x+*2) ≠0, получим

 или, заменив log*5* (*x+*2) = *t*, придем к квадратному уравнению *t* 2 – *t –* 2 = 0, *t*1 = –1, *t*2 =2.

Возвращаемся к первоначальной переменной:

log5(*x+*2) = –1, *x*+2 = 1/5, *x* = –9/5,

log5(*x+*2) = 2, *x*+2 = 25, *x* = 23.

Оба корня принадлежат области определения уравнения.

Ответ: *x* = –9/5, *x* = 23.

**Упражнения для закрепления материала**

Решить уравнения

1); 2); 3);

4); 5);

**Контрольные вопросы**

1. Сформулировать определение логарифмического уравнения.

2. Назвать основные методы решения логарифмических уравнений

**Литература**

1.Ш.А.Алимов, стр.105-111 2 О.Н.Афанасьева, стор.2753-279 3.А.Г.Мерзляк, стор.202-2