*Тема 2.*Основы теории вероятностей

Случайные события. Классическое определение вероятностей.

Основным понятием теории вероятностей является понятие случайного события.

Случайным событием называется событие, которое при осуществлении некоторых условий может произойти или не произойти.

Например, попадание в некоторый объект или промах при стрельбе по этому объекту из данного орудия является случайным событием.

Событие называется достоверным, если в результате испытания оно обязательно происходит.

Невозможным называется событие, которое в результате испытания произойти не может.

КЛАССИЧЕСКАЯ ВЕРОЯТНОСТНАЯ СХЕМА

Для нахождения вероятности случайного события A при проведении некоторого испытания следует:

1. найти число N всех возможных исходов данного испытания;

2. найти количество N(A) тех исходов испытания, в которых наступает событие A;

3. найти частное N(A)N — оно и будет равно вероятности события A.

Р(А) = N(A) / N  ИЛИ Р(А) = m  /  n  где n – общее число исходов испытания, m – число исходов, благоприятствующих событию А.

*Пример1:*

*из колоды в*36*карт вынимается одна карта. Какова вероятность появления карты червовой масти?*

*Решение. Количество элементарных исходов (количество карт)*N=36*. Событие*A*— появление карты червовой масти. Число случаев, благоприятствующих появлению события*A*,*N(A)=9*. Следовательно,*P(A)=9/36=1/4=0,25*.*

*Пример2*

В коробке находятся 8 мячика(-ов) белого цвета и 7 мячик(-ов) красного цвета. Какова вероятность вытащить мячик белого цвета?

 Пример: Бросается один раз игральная кость. Какова вероятность выпадения нечетного числа очков?

Решение: Опыт состоит в бросании игральной кости 1 раз и наблюдении за числом очков, появившихся на верхней грани.

Все исходы опыта: 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Число всех исходов: n = 6.

Рассмотрим событие А – выпало нечетное число очков. Исходы благоприятствующие А: 1, 3, 5.

Число исходов, благоприятствующих А : m = 3

.

Пример: Ребенок играет с шестью буквами разрезной азбуки А, В, К, М, О, С. Какова вероятность того, что при случайном расположении букв в ряд получится слово «МОСКВА»?

Решение: Опыт состоит в случайном расположении шести букв в ряд. Все исходы опыта – множество перестановок из шести различных букв.

Число всех исходов: n = P6=6! = 1.2.3.4.5.6=720.

Рассмотрим событие А – при случайном расположении шести букв в ряд получено слово «МОСКВА». Очевидно, что такое расположение букв единственно, т.е. m=1. Найдем вероятность события А: P(A)=.

Пример: В ящике находится 20 деталей, из них 8 бракованных. Из ящика наудачу извлекают 5 деталей. Найти вероятность того, что среди них окажутся две бракованные детали.

Решение: Опыт состоит в выборе наудачу 5 деталей из 20. Все исходы опыта – множество сочетаний из 20 деталей (находящихся в ящике) по 5.

Число всех исходов опыта n==

Рассмотрим событие А – среди 5 деталей, извлеченных из ящика, две бракованные.

Если среди 5 деталей две бракованные, то остальные 3 небракованные. Тогда число исходов, благоприятствующих событию А, можно найти по принципу умножения. Нужно выполнить одно за другим два действия: из 8 бракованных выбрать 2 детали и затем из 12 небракованных выбрать 3 детали. Первое действие можно выполнить n1=второе действие можно выполнить n2= способами. Итак, m=n1.n2= .

Найдем вероятность события А:

КЛАССИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Вероятностью события A при проведении некоторого испытания называют отношение числа тех исходов, в результате которых наступает событие A, к общему числу всех (равновозможных между собой) исходов этого испытания.

Случайные события называются не совместными в данном испытании, если никакие два из них не могут появиться вместе.

Теорема

 Если события A и B не совместны, то вероятность того, что наступит или A, или B, равна P(A)+P(B).

Теорема

Для нахождения вероятности противоположного события следует из единицы вычесть вероятность самого события: P(A)=1−P(A).

Но встречаются испытания и с бесконечным множеством исходов. К ним классическая вероятностная схема уже неприменима.

Сформулируем общее правило для нахождения геометрических вероятностей.

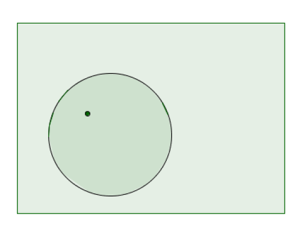
Если площадь S(A) фигуры A разделить на площадь S(X) фигуры X, которая целиком содержит фигуру A, то получится вероятность того, что точка, случайно выбранная из фигуры X, окажется в фигуре A: P=S(A)/S(X).

Аналогично поступают и с множествами на числовой прямой, и с пространственными телами. Но в этих случаях площади следует заменить или на длину числовых множеств, или на объёмы пространственных тел.

*Пример:*

*в прямоугольник*5×4cm2*помещён круг радиуса*1,5cm*. Какова вероятность того, что точка, случайным образом поставленная в прямоугольник, окажется внутри круга?*

*Решение: по определению геометрической вероятности искомая вероятность равна отношению площади круга (в который точка должна попасть) к площади прямоугольника (в которой точка ставится), т. е.*P=Sкруга /:Sпрямоугольника=π⋅1,52/5⋅4=0,353*.*

**

Задачи на классическое определение вероятности

Буквой *A*обозначаем событие, фигурирующее в условии задачи.

Задача. Корреспонденция разносится в *5* адресов. Разносчик забыл дома очки и разнес корреспонденцию случайным образом. Какова вероятность того, что вся корреспонденция попала к своим адресатам?

*Решение*. Элементарным событием является перестановка из *5* адресов. Их число равно По смыслу задачи все они равновероятны. Поэтому *P(A)= 1/120.*

Задача. Цифры *0,1,2,3* написаны на четырех карточках. Карточки расположили в случайном порядке. Какова вероятность того, что из них сложено 4-х-значное число?

*Решение*. Элементарным событием является перестановка из 4 карточек. Их всего 4!. Поскольку четырехзначное число не может начинаться с нуля*,*то событие *A* состоит из тех перестановок, которые начинаются с карточки с не равной нулю цифрой. Их всего *4!-3!=18*. Поэтому *P(A*)= *18/4! =18/24=3/4.*

Задача. В хоккейном турнире участвуют 6 равных по силе команд. Каждая команда должна сыграть с каждой одну игру. У Вас есть любимая команда. Вы пришли «поболеть» на турнир на одну из игр, выбранных случайно. Какова вероятность того, что в этой игре будет играть Ваша любимая команда?

*Решение*. Общее число проведенных игр равно*C62=15.*Любимая команда участвует в *5* играх из *15*. Поэтому*P(A)= 5/15 = 1/3.*

Задача. В ящике разложено *20* деталей. Известно, что *5* из них являются стандартными. Рабочий случайным образом берет *3* детали. Какова вероятность того, что хотя бы одна деталь стандартная?

*Решение*. Элементарным событием является сочетание из *20* деталей по *3*. Количество таких сочетаний равно *C203.* В соответствии с решением задачи *11*, число сочетаний, содержащих хотя бы одну стандартную деталь равно *C203- C153=685.* Поэтому *P(A)=*

Задача. Из *7* карточек разрезной азбуки составлено слово *колокол*. Эти карточки рассыпали и затем собрали в случайном порядке. Какова вероятность того, что снова получится слово *колокол*?

*Решение*. На карточках имеется *3* буквы *о*, *2* буквы *к*, *2* буквы *л*. Поэтому, первая буква слова *колокол* может быть выбрана двумя способами, вторая – 3 способами, третья – 2 способами. При уже выбранных первых трех буквах четвертая буква может быть выбрана еще 2 способами (поскольку одна буква *о* уже выбрана). Остальные буквы могут быть выбраны только одним способом. Таким образом (см. решение задачи 12), число перестановок карточек, реализующих слово *колокол*равно произведению чисел *3, 2, 2, 2* т.е. равен *24*. Общее число перестановок карточек равно *7!.*Поэтому *P(A)=*

Сложение вероятностей несовместных событий

Сложение вероятностей используется тогда, когда нужно вычислить вероятность объединения или логической суммы случайных событий.

Сумму событий *A* и *B* обозначают *A* + *B* или *A* ∪ *B*. Суммой двух событий называется событие, которое наступает тогда и только тогда, когда наступает хотя бы одно из событий. Это означает, что *A* + *B* – событие, которое наступает тогда и только тогда, когда при наблюдении произошло событие *A*или событие *B*, или одновременно *A*и *B*.

Больше о сути логической суммы можно узнать в соответствующем месте статьи "[Булева алгебра (алгебра логики)](https://function-x.ru/buleva_algebra.html#paragraph3)".

Если события *A*и *B*взаимно несовместны и их вероятности даны, то вероятность того, что в результате одного испытания произойдёт одно из этих событий, рассчитывают, используя сложение вероятностей.

Теорема сложения вероятностей. Вероятность того, что произойдёт одно из двух взаимно несовместных событий, равна сумме вероятностей этих событий:

*https://function-x.ru/chapter10-2/probabilities2_clip_image004.gif*       (3)

Например, на охоте произведены два выстрела. Событие *А* – попадание в утку с первого выстрела, событие *В*– попадание со второго выстрела, событие (*А*+ *В*) – попадание с первого или второго выстрела или с двух выстрелов. Итак, если два события *А*и *В* – несовместные события, то *А*+ *В*– наступление хотя бы одного из этих событий или двух событий.

Можно рассчитать как классические, так и статистические вероятности.

Пример 1. В ящике 30 мячиков одинаковых размеров: 10 красных, 5 синих и 15 белых. Вычислить вероятность того, что не глядя будет взят цветной (не белый) мячик.

Решение. Примем, что событие *А*– «взят красный мячик», а событие *В*– «взят синий мячик». Тогда событие https://function-x.ru/chapter10-2/probabilities2_clip_image006.gif- «взят цветной (не белый) мячик». Найдём вероятность события *А*:

https://function-x.ru/chapter10-2/probabilities2_clip_image008.gif

и события *В*:

https://function-x.ru/chapter10-2/probabilities2_clip_image010.gif

События *А*и *В* – взаимно несовместные, так как если взят один мячик, то нельзя взять мячики разных цветов. Поэтому используем сложение вероятностей:

https://function-x.ru/chapter10-2/probabilities2_clip_image012.gif

Задачи посложнее, в которых нужно применять и сложение и умножение вероятностей - на странице ["Различные задачи на сложение и умножение вероятностей"](https://function-x.ru/probabilities_sum_and_product.html).

Теорема сложения вероятностей для нескольких несовместных событий. Если события https://function-x.ru/chapter10-2/probabilities2_clip_image014.gifсоставляют полное множество событий, то сумма их вероятностей равна 1:

https://function-x.ru/chapter10-2/probabilities2_clip_image016.gif

Сумма вероятностей противоположных событий также равна 1:

https://function-x.ru/chapter10-2/probabilities2_clip_image018.gif

Противоположные события образуют полное множество событий, а вероятность полного множества событий равна 1.

Вероятности противоположных событий обычно обозначают малыми буквами *p* и *q*. В частности,

https://function-x.ru/chapter10-2/probabilities2_clip_image020.gif

из чего следуют следующие формулы вероятности противоположных событий:

https://function-x.ru/chapter10-2/probabilities2_clip_image022.gifи https://function-x.ru/chapter10-2/probabilities2_clip_image024.gif.

Пример 2. Цель в тире разделена на 3 зоны. Вероятность того что некий стрелок выстрелит в цель в первой зоне равна 0,15, во второй зоне – 0,23, в третьей зоне – 0,17. Найти вероятность того, что стрелок попадет в цель и вероятность того, что стрелок попадёт мимо цели.

Решение: Найдём вероятность того, что стрелок попадёт в цель:

https://function-x.ru/chapter10-2/probabilities2_clip_image026.gif

Найдём вероятность того, что стрелок попадёт мимо цели:

https://function-x.ru/chapter10-2/probabilities2_clip_image028.gif

Задачи посложнее, в которых нужно применять и сложение и умножение вероятностей - на странице ["Различные задачи на сложение и умножение вероятностей"](https://function-x.ru/probabilities_sum_and_product.html).

Сложение вероятностей взаимно совместных событий

Два случайных события называются совместными, если наступление одного события не исключает наступления второго события в том же самом наблюдении. Например, при бросании игральной кости событием *А*считается выпадение числа 4, а событием *В*– выпадение чётного числа. Поскольку число 4 является чётным числом, эти два события совместимы. В практике встречаются задачи по расчёту вероятностей наступления одного из взаимно совместных событий.

Теорема сложения вероятностей для совместных событий. Вероятность того, что наступит одно из совместных событий, равна сумме вероятностей этих событий, из которой вычтена вероятность общего наступления обоих событий, то есть произведение вероятностей. Формула вероятностей совместных событий имеет следующий вид:

https://function-x.ru/chapter10-2/probabilities2_clip_image060.gif

Поскольку события *А*и *В* совместимы, событие *А*+ *В*наступает, если наступает одно из трёх возможных событий: https://function-x.ru/chapter10-2/probabilities2_clip_image062.gif или *АВ*. Согласно теореме сложения несовместных событий, вычисляем так:

https://function-x.ru/chapter10-2/probabilities2_clip_image064.gif         (5)

Событие *А*наступит, если наступит одно из двух несовместных событий: https://function-x.ru/chapter10-2/probabilities2_clip_image066.gif или *АВ*. Однако вероятность наступления одного события из нескольких несовместных событий равна сумме вероятностей всех этих событий:

https://function-x.ru/chapter10-2/probabilities2_clip_image068.gif

Поэтому

https://function-x.ru/chapter10-2/probabilities2_clip_image070.gif                              (6)

Аналогично:

https://function-x.ru/chapter10-2/probabilities2_clip_image072.gif

Поэтому

https://function-x.ru/chapter10-2/probabilities2_clip_image074.gif                             (7)

Подставляя выражения (6) и (7) в выражение (5), получаем формулу вероятности для совместных событий:

https://function-x.ru/chapter10-2/probabilities2_clip_image060_0000.gif             (8)

При использовании формулы (8) следует учитывать, что события *А* и *В*могут быть:

* взаимно независимыми;
* взаимно зависимыми.

Формула вероятности для взаимно независимых событий:

https://function-x.ru/chapter10-2/probabilities2_clip_image077.gif

Формула вероятности для взаимно зависимых событий:

https://function-x.ru/chapter10-2/probabilities2_clip_image079.gif

Если события *А*и *В*несовместны, то их совпадение является невозможным случаем и, таким образом, *P*(*AB*) = 0. Четвёртая формула вероятности для несовместных событий такова:

https://function-x.ru/chapter10-2/probabilities2_clip_image081.gif

Пример 3. На автогонках при заезде на первой автомашине вероятность победить https://function-x.ru/chapter10-2/probabilities2_clip_image083.gif, при заезде на второй автомашине https://function-x.ru/chapter10-2/probabilities2_clip_image085.gif. Найти:

* вероятность того, что победят обе автомашины;
* вероятность того, что победит хотя бы одна автомашина;

Решение.

1) Вероятность того, что победит первая автомашина, не зависит от результата второй автомашины, поэтому события *А*(победит первая автомашина) и *В* (победит вторая автомашина) – независимые события. Найдём вероятность  того, что победят обе машины:

https://function-x.ru/chapter10-2/probabilities2_clip_image087.gif

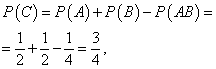
2) Найдём вероятность того, что победит одна из двух автомашин:

https://function-x.ru/chapter10-2/probabilities2_clip_image089.gif

Решить задачу на сложение вероятностей самостоятельно, а затем посмотреть решение

Пример 4. Бросаются две монеты. Событие *A* - выпадение герба на первой монете. Событие *B* - выпадение герба на второй монете. Найти вероятность события *C* = *A* + *B*.

Решение:



или через противоположное событие

https://function-x.ru/chapter10-1/pc010.gif.

Умножение вероятностей

Умножение вероятностей используют, когда следует вычислить вероятность логического произведения событий.

При этом случайные события должны быть независимыми. Два события называются взаимно независимыми, если наступление одного события не влияет на вероятность наступления второго события.

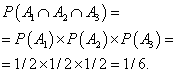
Логическим произведением двух событий *А* и *В*, обозначаемым *А* ∩ *В*, называют событие, которое понимают как одновременное наступление событий *А* и *В*. Больше о сути логического произведения можно узнать в соответствующем месте статьи "[Булева алгебра (алгебра логики)](https://function-x.ru/buleva_algebra.html#paragraph3)".

Теорема умножения вероятностей для независимых событий. Вероятность одновременного наступления двух независимых событий *А*и *В https://function-x.ru/chapter10-2/probabilities2_clip_image030_0000.gif*равна произведению вероятностей этих событий и вычисляется по формуле:

https://function-x.ru/chapter10-2/probabilities2_clip_image033.gif                   (4)

Пример 5. Монету бросают три раза подряд. Найти вероятность того, что все три раза выпадет герб.

Решение. Вероятность того, что при первом бросании монеты выпадет герб https://function-x.ru/chapter10-2/probabilities2_clip_image035.gif, во второй раз https://function-x.ru/chapter10-2/probabilities2_clip_image037.gif, в третий раз https://function-x.ru/chapter10-2/probabilities2_clip_image039.gif. Найдём вероятность того, что все три раза выпадет герб:



Решить задачи на умножение вероятностей самостоятельно, а затем посмотреть решение

Пример 6. Имеется коробка с девятью новыми теннисными мячами. Для игры берут три мяча, после игры их кладут обратно. При выборе мячей игранные от неигранных не отличают. Какова вероятность того, что после трёх игр в коробке не оРешение. Событие A может произойти единственным способом: первый раз, второй и третий из коробки будут вынуты неигранные мячи. Первый раз это обеспечено. Поэтому

https://function-x.ru/chapter10-1/pc011.gif

станется неигранных мячей?

Пример 7. 32 буквы русского алфавита написаны на карточках разрезной азбуки. Пять карточек вынимаются наугад одна за другой и укладываются на стол в порядке появления. Найти вероятность того, что из букв получится слово "конец".

https://function-x.ru/chapter10-1/pc012.gif

Пример 8. Из полной колоды карт (52 листа) вынимаются сразу четыре карты. Найти вероятность того, что все эти четыре карты будут разных мастей.

Решение. Первая карта может быть какой угодно масти. Вторая должна быть не такой, как первая. Третья - не такой, как первая и вторая. Четвёртая - не такой, как три первые. Искомая вероятность равна

https://function-x.ru/chapter10-1/pc013.gif.

Пример 9. Та же задача, что в примере 8, но каждая карта после вынимания возвращается в колоду.

Решение:https://function-x.ru/chapter10-1/pc014.gif

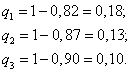
Задачи посложнее, в которых нужно применять и сложение и умножение вероятностей, а также вычислять произведение нескольких событий - на странице ["Различные задачи на сложение и умножение вероятностей"](https://function-x.ru/probabilities_sum_and_product.html).

Вероятность того, что произойдёт хотя бы одно из взаимно независимых событий https://function-x.ru/chapter10-2/probabilities2_clip_image014_0000.gif, можно вычислить путём вычитания из 1 произведения вероятностей противоположных событий https://function-x.ru/chapter10-2/probabilities2_clip_image044.gif, то есть по формуле:

https://function-x.ru/chapter10-2/probabilities2_clip_image046.gif

Пример 10. Грузы доставляют тремя видами транспорта: речным, железнодорожным и автотранспортом. Вероятность того, что груз будет доставлен речным транспортом, составляет 0,82, железнодорожным транспортом 0,87, автотранспортом 0,90. Найти вероятность того, что груз будет доставлен хотя бы одним из трёх видов транспорта.

Решение. Найдём вероятности противоположных событий – того, что груз не будет доставлен одним из видов транспорта:



Теперь у нас есть всё, чтобы найти требуемую в условии задачи вероятность того, что груз будет доставлен хотя бы одним из трёх видов транспорта:

https://function-x.ru/chapter10-2/probabilities2_clip_image050.gif

Решить задачу на умножение вероятностей самостоятельно, а затем посмотреть решение

Пример 11. Из полной колоды карт (52 карты) вынимают одновременно четыре карты. Событие *А* - среди вынутых карт будет хотя бы одна бубновая. Событие *B* - среди вынутых карт будет хотя бы одна червонная. Найти вероятность события *C* = *A* + *B*.

Решение. Переходя к противоположному событию https://function-x.ru/chapter10-1/pc015.gif - нет ни бубновой, ни червонной карты, получаем

https://function-x.ru/chapter10-1/pc016.gif,

откуда

https://function-x.ru/chapter10-1/pc017.gif.

Умножение вероятностей взаимно зависимых случайных событий

Если наступление одного события влияет на вероятность наступления второго события, то события называют взаимно зависимыми.

Если события *А* и *В* взаимно зависимы, то условной вероятностью https://function-x.ru/chapter10-2/probabilities2_clip_image052.gifназывают вероятность события *В*, принимая, что событие *А* уже наступило.

Теорема умножения вероятностей взаимно зависимых событий. Вероятность произведения двух событий равна вероятности одного из них, умноженной на условную вероятность другого при наличии первого, то есть вычисляется по формуле:

https://function-x.ru/chapter10-2/sp009.gif

или

https://function-x.ru/chapter10-2/sp010.gif

Пример 12. В ящике 26 лотерейных билетов, из которых 3 с выигрышем. Найти вероятности того, что первый билет будет с выигрышем, вероятность того, что второй билет будет с выигрышем при условии, что первого билета уже нет в ящике и вероятность того, что два взятые подряд билета будут с выигрышем.

Решение. Найдём вероятность того, что первый взятый билет будет с выигрышем:

*https://function-x.ru/chapter10-2/probabilities2_clip_image054.gif*

Найдём вероятность того, что второй взятый билет будет с выигрышем при условии, что первого билета уже нет в ящике:

*https://function-x.ru/chapter10-2/probabilities2_clip_image056.gif*

Найдём теперь вероятность того, что оба взятые подряд билеты будут с выигрышем, т.е. вероятность общего наступления двух зависимых событий, которая является произведением вероятности первого события и условной вероятности второго события:

https://function-x.ru/chapter10-2/probabilities2_clip_image058.gif