Схема Бернулли. Примеры решения задач

*Схема Бернулли* — это когда производится *n* однотипных независимых опытов, в каждом из которых может появиться интересующее нас событие *A*, причем известна вероятность этого события *P*(*A*) = p. Требуется определить вероятность того, что при проведении *n* испытаний событие *A* появится ровно *k* раз.

Рассмотрим многочисленные примеры на использование формулы Бернулли, которое касается независимых испытаний

Задачи, которые решаются по схеме Бернулли, чрезвычайно разнообразны: от простеньких (типа «найдите вероятность, что стрелок попадет 1 раз из 10») до весьма суровых (например, задачи на проценты или игральные карты). В реальности эта схема часто применяется для решения задач, связанных с контролем качества продукции и надежности различных механизмов, все характеристики которых должны быть известны до начала работы.

Задача 1

Стрелок совершает 4 выстрела по мишени. Вероятность попадания при каждом выстреле постоянна и равна http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image004.gif. Найти вероятность того, что:

а) стрелок попадёт только один раз;  
б) стрелок попадёт 2 раза.

**Решение**: условие сформулировано **в общем виде** и вероятность попадания в мишень при каждом выстреле считается известной. Она равна http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image004_0000.gif (если совсем тяжко, присвойте параметру какое-нибудь конкретное значение, например, http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image007.gif).

Коль скоро мы знаем http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image004_0001.gif, то легко найти вероятность промаха в каждом выстреле:  
http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image009.gif, то есть, «ку» – это тоже известная нам величина.

а) Рассмотрим событие «Стрелок попадёт только один раз» и обозначим его вероятность через http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image011.gif (индексы понимаются как «одно попадание из четырёх»).  Данное событие состоит в 4 несовместных исходах: стрелок попадёт в 1-й **или** во 2-й **или** в 3-й **или** в 4-й попытке.

По [теоремам сложения вероятностей несовместных и умножения вероятностей независимых событий](http://www.mathprofi.ru/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei.html):  
http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image013.gif

Упростим результат с помощью комбинаторной [формулы количества сочетаний](http://www.mathprofi.ru/formuly_kombinatoriki.pdf):  
http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image015.gif способами можно выбрать попытку, в которой стрелок попал.

И, поскольку в каждом случае имеет место 1 попадание и 3 промаха, то:  
http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image017.gif – вероятность того, что стрелок попадёт только один раз из четырёх

…Как-то так «с лёгкой руки» я начал называть повторные независимые испытания «попытками», что не в каждой задаче может быть корректным… …ну да ладно.

б) Рассмотрим событие «Стрелок попадёт два  раза» и обозначим его вероятность через http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image019.gif («два попадания из четырёх»). Здесь вариантов становится больше, попадания возможны:

в 1-й и 2-й попытках  
**или**  
в 1-й и 3-й попытках  
**или**  
в 1-й и 4-й попытках  
**или**  
во 2-й и 3-й попытках  
**или**  
во 2-й и 4-й попытках  
**или**  
в 3-й и 4-й попытках.

Таким образом, по тем же [теоремам сложения и умножения вероятностей](http://www.mathprofi.ru/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei.html):  
http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image021.gif

Можно ли так решать задачу? Безусловно, можно. Но что делать, если серия состоит из 5, 6 или бОльшего количества выстрелов? Тут уже будут получаться десятки слагаемых, запись которых отнимет много времени и места. В этой связи рациональнее придерживаться более компактной схемы:  
http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image023.gif способами (перечислены выше) можно выбрать 2 попытки, в которых произойдут попадания.

И, поскольку в любом исходе ровно 2 попадания и 2 промаха, то:  
http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image025.gif – вероятность того, что стрелок попадёт 2 раза из 4.

**Ответ**: http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image027.gif

Итак – вероятность того, что будет 1 попадание из 4, равна http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image029.gif, вероятность того, что будет 2 попадания из 4, равна http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image031.gif… не замечаете ли вы закономерности?

Только что на конкретном примере мы повторили путь Якоба Бернулли, который несколько веков назад вывел формулу, названную позже в его честь:

– Вероятность http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image033.gif того, что **в**http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image035.gif**независимых испытаниях** некоторое случайное событие http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image002_0000.gif наступит **ровно**http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image037.gif**раз**, равна:

http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image039.gif, где:

http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image004_0002.gif – вероятность появления события http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image002_0001.gif в каждом испытании;  
http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image009_0000.gif – вероятность непоявления события http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image002_0002.gif в каждом испытании.

Коэффициент http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image043.gif часто называют биномиальным коэффициентом.

Примечание: формула Бернулли справедлива только для тех независимых испытаний,в которых вероятность *http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image004_0003.gif* события *http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image002_0003.gif* сохраняется постоянной. Но на практике в результате испытаний могут появляться разные события с разными вероятностями – в этом случае работает другая формула. Соответствующие примеры можно найти, например, в типовых [*расчётах из сборника Чудесенко*](http://www.mathprofi.ru/skachat_primery_po_vysshei_matematike.html) (Задача 18).

За примером далеко ходить не будем:

Задача 2

Найти вероятность того, что при 10 бросках монеты орёл выпадет 3 раза.

**Решение**: сначала немного порассуждаем: всего проводится 10 повторных независимых испытаний. Сколькими способами можно выбрать 3 испытания, в которых выпадет орёл?  
http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image046.gif способами!

Это что же получается – записывать 120 слагаемых, в каждом из которых 10 множителей? =)

Используем формулу Бернулли: http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image039_0000.gif, в данном случае:  
http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image048.gif – всего испытаний;  
http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image050.gif – количество испытаний, в которых должен появиться орёл;  
http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image052.gif – вероятность появления орла в каждом испытании;  
http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image054.gif – вероятность появления решки в каждом испытании.

Таким образом:  
http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image056.gif – вероятность того, что при 10 бросках монеты орёл выпадет ровно 3 раза.

**Ответ**: http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image058.gif

Следует отметить, что повторный характер независимых испытаний не является «жизненно важным» (необходимым) условием для применения формулы Бернулли. Рассмотрим похожую задачу (которая, кстати, эквивалентна Задаче 8 урока о [*классическом определении вероятности*](http://www.mathprofi.ru/zadachi_na_klassicheskoe_opredelenie_verojatnosti_primery_reshenij.html)):

Найти вероятность того, что при броске 10 монет орёл выпадет на 3 монетах.

Здесь испытания не повторяются, а скорее, производятся одновременно, но, тем не менее, работает та же самая формула: http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image060.gif.

Решение будет отличаться смыслом и некоторыми комментариями, в частности:  
http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image062.gif способами можно выбрать 3 монеты, на которых выпадет орёл.  
http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image052_0000.gif – вероятность выпадения орла на каждой из 10 монет

Вернемся к определению. Поскольку речь идет о независимых испытаниях, и в каждом опыте вероятность события *A* одинакова, возможны лишь два исхода:

1. *A* — появление события *A* с вероятностью p;
2. «не А» — событие А не появилось, что происходит с вероятностью

*q* = 1 − p.

Важнейшее условие, без которого схема Бернулли теряет смысл — это постоянство. Сколько бы опытов мы ни проводили, нас интересует одно и то же событие *A*, которое возникает с одной и той же вероятностью p.

Между прочим, далеко не все задачи в теории вероятностей сводятся к постоянным условиям. . Даже такое нехитрое дело, как вынимание разноцветных шаров из ящика, не является опытом с постоянными условиями. Вынули очередной шар — соотношение цветов в ящике изменилось. Следовательно, изменились и вероятности.

Если же условия постоянны, можно точно определить вероятность того, что событие *A* произойдет ровно *k* раз из *n* возможных. Сформулируем этот факт в виде теоремы:

*Теорема Бернулли*. Пусть вероятность появления события *A* в каждом опыте постоянна и равна р. Тогда вероятность того, что в *n* независимых испытаниях событие *A* появится ровно *k* раз, рассчитывается по формуле:

Формула Бернулли

где *Cnk* — число сочетаний, *q* = 1 − p.

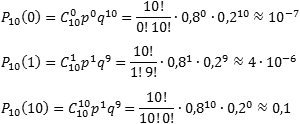
Эта формула так и называется: *формула Бернулли*. Интересно заметить, что задачи, приведенные ниже, вполне решаются без использования этой формулы. Например, можно применить формулы сложения вероятностей. Однако объем вычислений будет просто нереальным.

Задача1. Вероятность выпуска бракованного изделия на станке равна 0,2. Определить вероятность того, что в партии из десяти выпущенных на данном станке деталей ровно *k* будут без брака. Решить задачу для *k* = 0, 1, 10.

По условию, нас интересует событие *A* выпуска изделий без брака, которое случается каждый раз с вероятностью p = 1 − 0,2 = 0,8. Нужно определить вероятность того, что это событие произойдет *k* раз. Событию *A* противопоставляется событие «не *A*», т.е. выпуск бракованного изделия.

Таким образом, имеем: *n* = 10; p = 0,8; *q* = 0,2.

Итак, находим вероятность того, что в партии все детали бракованные (*k* = 0), что только одна деталь без брака (*k* = 1), и что бракованных деталей нет вообще (*k* = 10):



Задача.2. Монету бросают 6 раз. Выпадение герба и решки равновероятно. Найти вероятность того, что:

1. герб выпадет три раза;
2. герб выпадет один раз;
3. герб выпадет не менее двух раз.

Итак, нас интересует событие *A*, когда выпадает герб. Вероятность этого события равна p = 0,5. Событию *A* противопоставляется событие «не *A*», когда выпадает решка, что случается с вероятностью *q* = 1 − 0,5 = 0,5. Нужно определить вероятность того, что герб выпадет *k* раз.

Таким образом, имеем: *n* = 6; p = 0,5; *q* = 0,5.

Определим вероятность того, что герб выпал три раза, т.е. *k* = 3:

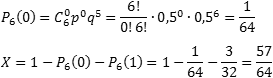
Герб выпадет три раза

Теперь определим вероятность того, что герб выпал только один раз, т.е. *k* = 1:

Герб выпадет один раз

Осталось определить, с какой вероятностью герб выпадет не менее двух раз. Основная загвоздка — во фразе «не менее». Получается, что нас устроит любое *k*, кроме 0 и 1, т.е. надо найти значение суммы *X* = *P*6(2) + *P*6(3) + ... + *P*6(6).

Заметим, что эта сумма также равна (1 − *P*6(0) − *P*6(1)), т.е. достаточно из всех возможных вариантов «вырезать» те, когда герб выпал 1 раз (*k* = 1) или не выпал вообще (*k* = 0). Поскольку *P*6(1) нам уже известно, осталось найти *P*6(0):



Задача.3. Вероятность того, что телевизор имеет скрытые дефекты, равна 0,2. На склад поступило 20 телевизоров. Какое событие вероятнее: что в этой партии имеется два телевизора со скрытыми дефектами или три?

Интересующее событие *A* — наличие скрытого дефекта. Всего телевизоров *n* = 20, вероятность скрытого дефекта p = 0,2. Соответственно, вероятность получить телевизор без скрытого дефекта равна *q* = 1 − 0,2 = 0,8.

Получаем стартовые условия для схемы Бернулли: *n* = 20; p = 0,2; *q* = 0,8.

Найдем вероятность получить два «дефектных» телевизора (*k* = 2) и три (*k* = 3):

Р20(2)= С220p2q18 =20!/ (3! 17!)\*0,23 \*0,818 = 0,137

Р20(3) = 0,41

Очевидно, *P*20(3) > *P*20(2), т.е. вероятность получить три телевизора со скрытыми дефектами больше вероятности получить только два таких телевизора. Причем, разница неслабая.

Небольшое замечание по поводу факториалов. Многие испытывают смутное ощущение дискомфорта, когда видят запись «0!» (читается «ноль факториал»). Так вот, 0! = 1 по определению.

*P*. *S*.А самая большая вероятность в последней задаче — это получить четыре телевизора со скрытыми дефектами. Подсчитайте сами — и убедитесь.

Задача 3

Игральную кость бросают 6 раз. Найти вероятность того, что 5 очков:

а) не выпадут (выпадут 0 раз);  
б) выпадут 2 раза;  
в) выпадут 5 раз.

Результаты округлить до 4 знаков после запятой.

: ***Решение***: используем формулу Бернулли: *http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image039_0001.gif*, в данной задаче:  
*http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image123_0000.gif* – всего испытаний;  
*http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image172.gif* – вероятность выпадения «пятёрки» в каждом испытании;  
*http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image174.gif* – вероятность того, что «пятёрка» не выпадет (для каждого испытания).  
а) *http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image176.gif*  
*http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image178.gif* – вероятность того, что в результате 6 бросков кубика «пятёрка» не появится.  
б) *http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image180.gif*  
*http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image182.gif* – вероятность того, что в 6 испытаниях «пятёрка» выпадет ровно 2 раза.  
в) *http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image184.gif*  
*http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image186.gif* – вероятность того, что в 6 испытаниях «пятёрка» выпадет ровно 5 раз.  
Ответ: *http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image188.gif*

**Сформулируем строгий критерий**: для отыскания наивероятнейшего числа http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image071.gif появлений случайного события http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image002_0004.gif в http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image035_0000.gif независимых испытаниях (с вероятностью *http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image004_0004.gif* в каждом испытании)  руководствуются следующим двойным неравенством:

http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image075.gif, причём:

1) если значение http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image077.gif – дробное, то существует единственное наивероятнейшее число http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image079.gif;  
в частности, если http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image081.gif – целое, то оно и есть наивероятнейшее число: http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image083.gif;

2) если же http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image077_0000.gif – целое, то существуют **два**наивероятнейших числа: http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image071_0000.gif и http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image087.gif.

Наивероятнейшее число появлений «пятёрки» при 6 бросках кубика подпадает под частный случай первого пункта:  
http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image089.gif

В целях закрепления материала решим пару задач:

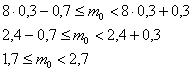
Задача 4

Вероятность того, что при броске мяча баскетболист попадёт в корзину, равна 0,3. Найти наивероятнейшее число попаданий при 8 бросках и соответствующую вероятность.

А это уже если и не Терминатор, то, как минимум, хладнокровный спортсмен =)

**Решение**: для оценки наивероятнейшего числа попаданий используем двойное неравенство http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image075_0000.gif. В данном случае:

http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image092.gif – всего бросков;  
http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image094.gif – вероятность попадания в корзину при каждом броске;  
http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image096.gif – вероятность промаха при каждом броске.

Таким образом, наивероятнейшее количество попаданий при 8 бросках находится в следующих пределах:  


Поскольку левая граница – дробное число (пункт №1), то существует единственное наивероятнейшее значение, и, очевидно, что оно равно http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image100.gif.

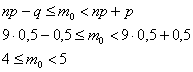
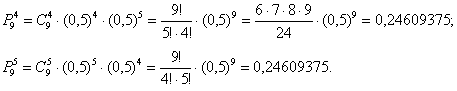
Используя формулу Бернулли http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image102.gif,  вычислим вероятность того, что при 8 бросках будет ровно 2 попадания:  
http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image104.gif

**Ответ**: http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image100_0000.gif – наивероятнейшее количество попаданий при 8 бросках,  
http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image107.gif – соответствующая вероятность.

Аналогичное задание для самостоятельного решения:

Задача 5

Монета подбрасывается 9 раз. Найти вероятность наивероятнейшего числа появлений орла

***Решение***: в данной задаче речь идёт о независимых испытаниях, при этом:  
*http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image190.gif* – всего испытаний;  
*http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image192.gif* – вероятность выпадения орла в каждом испытании;  
*http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image194.gif* – вероятность выпадения решки в каждом испытании.  
Найдём наивероятнейшее количество *http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image079_0000.gif* появлений орла:  
**  
Так как *http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image199.gif* – целое число, то существуют два наивероятнейших значения:  
*http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image201.gif* и *http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image203.gif*  
Используя формулу Бернулли, вычислим соответствующие вероятности:  
**  
Ответ: 4 и 5; *http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image207.gif*

Задача 6

Среди изделий, произведенных на станке-автомате, в среднем бывает 60% изделий первого сорта. Какова вероятность того, что среди 6 наудачу отобранных изделий будет:

а) от 2 до 4 изделий первого сорта;  
б) не менее 5 изделий первого сорта;  
в) хотя бы одно изделие более низкого сорта.

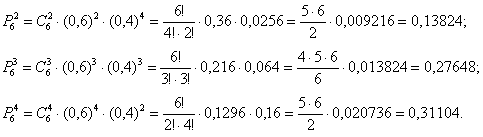
Вероятность производства первосортного изделия не зависит от качества других выпущенных изделий, поэтому здесь идёт речь о независимых испытаниях. Старайтесь не пренебрегать анализом условия, а то может статься – события-то [зависимые](http://www.mathprofi.ru/zavisimye_sobytija.html) или задача вообще о другом.

**Решение**: вероятность зашифрована под проценты, которые, напоминаю, нужно разделить на сто: http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image119.gif – вероятность того, что выбранное изделие будет 1-го сорта.  
Тогда: http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image121.gif – вероятность того, что оно не будет первосортным.

а) Событие «Среди 6 наудачу отобранных изделий будет от 2 до 4 изделий первого сорта» состоит в трёх несовместных исходах:

среди http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image123.gif изделий будет 2 первосортных **или** 3 первосортных **или** 4 первосортных.

С исходами удобнее разделаться по отдельности. Трижды используем формулу Бернулли http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image102_0000.gif:



По [теореме сложения вероятностей несовместных событий](http://www.mathprofi.ru/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei.html):  
http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image127.gif – вероятность того, что среди 6 наудачу отобранных изделий будет от 2 до 4 изделий первого сорта.

Решение можно было записать и «одной строкой», что мы, впрочем, сделаем в следующем пункте:

б) Событие «Среди 6 наудачу отобранных изделий будет не менее 5 изделий первого сорта» состоит в 2 несовместных исходах: первосортных изделий будет пять **или** шесть.

По [теореме сложения вероятностей несовместных событий](http://www.mathprofi.ru/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei.html):  
http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image129.gif  
http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image131.gif – искомая вероятность.

в) Вероятность того, что «Среди 6 наудачу отобранных изделий будет хотя бы одно изделие более низкого сорта» удобно найти через[**вероятность противоположного события**](http://www.mathprofi.ru/teorija_verojatnostei.html) («Все изделия будут первосортными»), которая уже известна:  
http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image133.gif – вероятность того, что среди шести отобранных изделий окажется хотя бы одно низкосортное.

**Ответ**: http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image135.gif

Давайте заодно вспомним такое полезное понятие, как [полная группа событий](http://www.mathprofi.ru/teorija_verojatnostei.html). Что осталось не найденным? Остались не найденными вероятности двух событий.

Не знаю кому как, а мне порядком поднадоел микрокалькулятор, и я предлагаю воспользоваться [расчётным макетом по теории вероятностей](http://www.mathprofi.ru/files/terver.xls) – это подарок для самых прилежных студентов, которые не уходят курить во время моих занятий =)

Вводим исходные данные и получаем:  
http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image137.gif – вероятность того, что все изделия окажутся более низкого сорта;  
http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image139.gif – вероятность того, что среди 6 изделий будет только одно первосортное.

Проверка: http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image141.gif  
http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image143.gif,  
что и требовалось проверить.

Небольшое задание для самостоятельного решения

Задача 7: ***Решение***: используем формулу Бернулли: *http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image102_0002.gif*,  в данном случае:  
*http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image092_0000.gif* – всего выстрелов;  
*http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image210.gif* – вероятность попадания в цель при каждом выстреле;  
*http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image212.gif* – вероятность промаха при каждом выстреле.  
По теореме сложения вероятностей несовместных событий:  
*http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image214.gif*   
*http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image216.gif* – вероятность того, что в серии из 8 выстрелов будет ни одного ***или*** 1 попадание.  
Найдём вероятность противоположного события:  
*http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image218.gif* – вероятность того, что цель будет поражена хотя бы два раза.  
Ответ: *http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image220.gif*

А сейчас весьма любопытная ситуация: предположим, что во всех 9 испытаниях выпал орёл. Это, кстати, не являются каким-то уж сильно невероятным событием: http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image109.gif ;-)

**Вопрос**: какая сторона монеты вероятнее всего выпадет в 10-м испытании?

Решка? Глубокое заблуждение!

**Правильный ответ**: вероятности останутся равными! Почему? Причина была сформулирована ещё в самом начале урока: поскольку испытания **независимы**, то вероятность выпадения орла либо решки в любом испытании **не зависит от результатов других испытаний**!

Однако игры разума таковы, что у многих людей напрашивается следующий вывод: «раз орёл выпал много раз подряд, то теперь выпадение решки **гораздо (!)** вероятнее». В теории и на практике этот психологический феномен получил название «Ошибка игрока». Если подбрасывать монету тысячи, десятки тысяч раз, то соотношение орлов/решек будет примерно равным (о чём мы ещё поговорим в статье [*Статистическое определение вероятности*](http://www.mathprofi.ru/statisticheskoe_opredelenie_verojatnosti.html)). Но в этом процессе неоднократно встретятся эпизоды, когда монету «заклинит» на какой-то одной грани; и КАК ИМЕННО распределятся эти «необычные» случаи на длинной дистанции – никто не знает.

К слову, о «необычности». Любая случайная последовательность девяти орлов/решек **так же вероятна**, как и выпадение 9 орлов! Проверить данный факт легче лёгкого: запишем произвольную последовательность исходов, например:  
Орёл/Решка/Решка/ Орёл /Решка/ Орёл /Решка/ Орёл /Орёл

По [теореме умножения вероятностей независимых событий](http://www.mathprofi.ru/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei.html), вероятность появления этой цепочки:  
http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image111.gif, что в точности равно вероятности выпадения девяти орлов http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image113.gif!

И здесь мы сталкиваемся со второй иллюзией – человек склонен считать «красивые» комбинации чем-то из ряда вон выходящим и чуть ли не фантастическим. Но на самом деле ничего «необычного», например, в комбинации О/О/О/Р/Р/Р/О/О/О  – нет, и она может запросто появиться в серии испытаний. Вероятность получить, скажем, пиковый «Ройял-флеш» в покере составляет 1:2598960, однако мало кто задумывается, что **с той же вероятностью** приходит ЛЮБАЯ, в том числе, совершено «мусорная» комбинация из пяти карт! И с этой точки зрения «сверхъестественная» комбинация  10, В, Д, К, Т пик ничем не примечательна – встречалась «в истории» наряду с другими очень много раз.

Кстати, к теме нашего разговора относятся и типичные ситуации в карточных играх – когда «карта идёт» и наоборот – когда «постоянно сдают один мусор» или «фатально не везёт». Такие «полосы» бывают у каждого игрока, и никакой мистики в этом нет.

На просторах Интернета часто встречается популярный «секрет выигрыша» в рулетку, также известный под названием «Мартингейл». Примерная суть состоит в следующем: «Ставьте на красное. Если выпало чёрное, удваивайте ставку и снова ставьте на красное. Если снова выпало чёрное, то ещё раз удваивайте ставку и снова ставьте на красное и т.д.». Казалось бы – вот оно, золотое дно, ведь красных секторов целых 18 из 37 (18 черных и 1 зеро в европейской рулетке)! И уж «красное» должно выпасть если не на 5-й, то на 10-й раз точно, что позволит отыграть всё ранее поставленное с прибылью!

Ничего подобного! Вероятность выпадения красного сектора в любом испытании постоянна http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image115.gif и никак не зависит от результатов предыдущих испытаний. Постоянна – **и проигрышна** (т.к. поставленные на «красное» деньги с вероятностью http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image117.gif проигрываются, а в случае успеха  – всего лишь удваиваются). Длинные серии «чёрного» вполне вероятны, и, кроме того, чтобы отыграть маленькую первоначальную ставку, игрок часто рискует куда более значительными суммами. Результат предсказуем. Поэтому данный «секрет», как и все остальные системы игры в рулетку – не работает. Заведению даже не надо как-то «подкручивать алгоритмы» или ограничивать игроков в размере ставок (хотя, как правило, существует ограничение на  размер депозита).

Остаётся вопрос: так почему же этот «удивительный способ» рекламируется в Сети на каждом шагу? Ответ прост: казино распиливает с владельцем сайта-лохотрона проигранные деньги каждого привлечённого Буратино. И что совсем забавляет – «благодетель» просит, чтобы особо везучие лохи отблагодарили его материально (обычно депозит сливается далеко не сразу и поначалу можно даже неплохо подняться). Кто виноват? Конечно же, мошенническая «шарашка», которая специально настроила программное обеспечение на «невероятный» проигрыш. Что делать? Попытать удачи в других заведениях.

«Ошибка игрока» совершается и многими участниками лотерей. На сайте одной лотереи на самом видном месте расположена информация о том, «какие номера давно не выпадали». И вот – целая армия энтузиастов начинает собирать статистику тиражей, подгадывать определённые комбинации и т.д. Чистой воды химера и пустая трата времени – если, например, №8 не выпадал 50 раз подряд, то он с таким же успехом может не выпасть ещё 150 розыгрышей (это не ирония – я в прямом смысле). Однако если провести десятки тысяч тиражей, то количество появлений всех номеров будет примерно равным. Но В КАКОМ ПОРЯДКЕ И КАКИМИ СЕРИЯМИ будет выпадать та же «восьмёрка» на длинной дистанции – никто предсказать не может.

«Русское лото» в этом смысле честнее – оно призывает «поставить на любимые номера», т.е. приобрести билет (онлайн), в котором присутствуют понравившиеся числа.  
Но в действительности **нет никакой разницы – покупаете ли вы билет наугад, или выбираете билет с определёнными числами, или даже если заполняете бланк самостоятельно**. Это если не учитывать потусторонние силы =)

После увлекательного отступления рассмотрим ещё несколько задач, а затем я поделюсь секретом правильной игры в азартные игры и лотереи.

Задача 6

Среди изделий, произведенных на станке-автомате, в среднем бывает 60% изделий первого сорта. Какова вероятность того, что среди 6 наудачу отобранных изделий будет:

а) от 2 до 4 изделий первого сорта;  
б) не менее 5 изделий первого сорта;  
в) хотя бы одно изделие более низкого сорта.

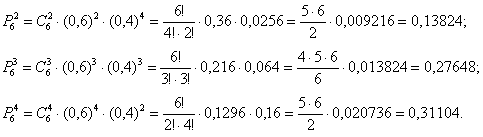
Вероятность производства первосортного изделия не зависит от качества других выпущенных изделий, поэтому здесь идёт речь о независимых испытаниях. Старайтесь не пренебрегать анализом условия, а то может статься – события-то [зависимые](http://www.mathprofi.ru/zavisimye_sobytija.html) или задача вообще о другом.

**Решение**: вероятность зашифрована под проценты, которые, напоминаю, нужно разделить на сто: http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image119.gif – вероятность того, что выбранное изделие будет 1-го сорта.  
Тогда: http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image121.gif – вероятность того, что оно не будет первосортным.

а) Событие «Среди 6 наудачу отобранных изделий будет от 2 до 4 изделий первого сорта» состоит в трёх несовместных исходах:

среди http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image123.gif изделий будет 2 первосортных **или** 3 первосортных **или** 4 первосортных.

С исходами удобнее разделаться по отдельности. Трижды используем формулу Бернулли http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image102_0000.gif:



По [теореме сложения вероятностей несовместных событий](http://www.mathprofi.ru/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei.html):  
http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image127.gif – вероятность того, что среди 6 наудачу отобранных изделий будет от 2 до 4 изделий первого сорта.

Решение можно было записать и «одной строкой», что мы, впрочем, сделаем в следующем пункте:

б) Событие «Среди 6 наудачу отобранных изделий будет не менее 5 изделий первого сорта» состоит в 2 несовместных исходах: первосортных изделий будет пять **или** шесть.

По [теореме сложения вероятностей несовместных событий](http://www.mathprofi.ru/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei.html):  
http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image129.gif  
http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image131.gif – искомая вероятность.

в) Вероятность того, что «Среди 6 наудачу отобранных изделий будет хотя бы одно изделие более низкого сорта» удобно найти через[**вероятность противоположного события**](http://www.mathprofi.ru/teorija_verojatnostei.html) («Все изделия будут первосортными»), которая уже известна:  
http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image133.gif – вероятность того, что среди шести отобранных изделий окажется хотя бы одно низкосортное.

**Ответ**: http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image135.gif

Давайте заодно вспомним такое полезное понятие, как [полная группа событий](http://www.mathprofi.ru/teorija_verojatnostei.html). Что осталось не найденным? Остались не найденными вероятности двух событий.

Не знаю кому как, а мне порядком поднадоел микрокалькулятор, и я предлагаю воспользоваться [расчётным макетом по теории вероятностей](http://www.mathprofi.ru/files/terver.xls) – это подарок для самых прилежных студентов, которые не уходят курить во время моих занятий =)

Вводим исходные данные и получаем:  
http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image137.gif – вероятность того, что все изделия окажутся более низкого сорта;  
http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image139.gif – вероятность того, что среди 6 изделий будет только одно первосортное.

Проверка: http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image141.gif  
http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image143.gif,  
что и требовалось проверить.

Небольшое задание для самостоятельного решения:

Задача 7

Производится 8 выстрелов по цели, в каждом из которых вероятность попадания равна 0,1. Найти вероятность того, что цель будет поражена хотя бы два раза.

Краткое решение и ответ в конце урока.

Следует отметить, что задачи на формулу Бернулли «хорошо узнаются» и обычно не вызывают затруднений. С дополнительными, в том числе весьма интересными примерами по теме можно ознакомиться в [этой](http://www.mathprofi.ru/files/gotovye_zadachi_na_formulu_bernulli.pdf)[**pdf-ке с готовыми решениями**](http://www.mathprofi.ru/files/gotovye_zadachi_na_formulu_bernulli.pdf). И одну из таких задач я разберу в заключение урока:

Задача 8

Для нормальной работы вычислительного центра необходима безотказная работа в течение дня, как минимум, 5 компьютеров. Сколько компьютеров нужно устано­вить, чтобы с вероятностью, не меньшей http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image145.gif обеспечить нормальную работу центра, если вероятность отказа компьютера в течение дня равна 0,05?

**Решение**: из условия легко найти, что вероятность безотказной работы любого компьютера в течение дня составляет http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image147.gif. Однако сам вопрос поставлен нетривиально – сколько компьютеров нужно установить? Иными словами, в формуле Бернулли http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image102_0001.gif нам не известно значение «эн».

Поскольку для нормальной работы центра необходима безотказная работа, **как минимум, 5 компьютеров**, то может быть пяти и хватит?

1) Если в вычислительном центре установить http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image149.gif компьютеров, то в течение дня безотказно должны работать они все. По формуле Бернулли:

http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image151.gif

Но по условию нормальную работу центра  нужно обеспечить **с вероятностью, не меньшей, чем**http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image145_0000.gif**!** А полученная нами вероятность http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image153.gif безотказной работы всех пяти компьютеров – заметно меньше. Значит, необходимо увеличить количество машин:

2) Предположим, что в вычислительном центре установлено http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image155.gif компьютеров. Тогда для нормальной его работы в течение дня безотказно должны работать 5 или 6 компьютеров.

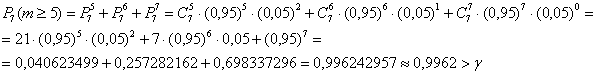
По [теореме сложения вероятностей несовместных событий](http://www.mathprofi.ru/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei.html):

http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image157.gif  
http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image159.gif – вероятность того, что в течение дня безотказно будут работать, как минимум, 5 компьютеров из шести.

Данное значение нас тоже не устроит, так как оно меньше требуемой надёжности работы вычислительного центра: http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image161.gif

Таким образом, шести компьютеров тоже не достаточно. Добавляем ещё один:

3) Пусть в вычислительном центре http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image163.gif компьютеров. Тогда безотказно должны работать 5, 6 или 7 компьютеров. Используя формулу Бернулли и [теорему сложения вероятностей несовместных событий](http://www.mathprofi.ru/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei.html), найдём вероятность того, что в течение дня безотказно будут работать, как минимум, 5 компьютеров из семи:



Есть! Требуемый уровень надёжности достигнут.

Можно, конечно, поставить и бОльшее количество компьютеров, но зачем переплачивать? =)

**Ответ**: чтобы обеспечить нормальную работу вычислительного центра в течение дня с вероятностью, не меньшей http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image167.gif, нужно установить не менее семи компьютеров.

Формула Бернулли очень удобна, но с другой стороны, обладает и рядом недостатков. Так, например, при достаточно больших значениях «эн» и «эм» её применение затруднено ввиду огромных значений факториалов. В этом случае используют [теоремы Лапласа](http://www.mathprofi.ru/lokalnaja_i_integralnaja_teoremy_laplasa.html), которые мы рассмотрим на следующем уроке. Другая распространённая на практике ситуация – когда вероятность http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image004_0005.gif некоторого события в отдельно взятом испытании достаточно мала, а количество испытаний http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image035_0001.gif велико. Вопрос разрешается с помощью [формулы Пуассона](http://www.mathprofi.ru/raspredelenie_i_formula_puassona.html).

И, наконец, обещанный секрет:

…Так всё-таки – как правильно играть в азартные игры и лотереи?

Наверное, многие ожидали услышать от меня что-нибудь вроде: «Лучше вообще не играть», «Открыть собственное казино», «Организовать лотерею» и т.п.

Ну почему же не играть? Игра – это одно из развлечений, а за развлечения, как известно, нужно… совершенно верно! Поэтому средства, на которые вы играете, следует считать платой за развлечение, но ни в коем случае трагической потерей.

Тем не менее, каждый участник азартной игры хочет выиграть. И выиграть хорошую сумму. Какой тактики (о стратегии речи не идет вообще) выгоднее всего придерживаться в игре с заведомо проигрышным [математическим ожиданием](http://www.mathprofi.ru/sluchainaya_velichina.html), например, в рулетке? Лучше всего сразу поставить **все** фишки, как вариант, на «красное» либо «чёрное». С вероятностью http://www.mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image115_0000.gif вы удвоитесь (и быстро, и много!), и если это произойдёт – обязательно потратьте выигрыш на другие развлечения =)

Не имеет смысла играть по какой-то «системе» (хотя бы потому, что это глупо) и тратить на это часы/дни/недели – в той же рулетке заведение имеет минимальное преимущество, и проигрываться можно ооооочень долго. Если в оффлайновом казино это ещё как-то можно понять (общение, выпивка, девочки и т.д.), то онлайн игра оставит вас с красными глазами и чувством глубокой досады.

Что касается лотерей, то билет лучше покупать опять же ради развлечения и… наобум. Или «по наитию». Правда, лично я почему-то никогда не слышал об экстрасенсах и предсказателях, которые выигрывают в лотереи =) Не иначе, как шифруются.

Естественно, перечисленные советы не относятся к хроническим лудоманам и им как раз таки «Лучше вообще не играть». Ну а тем посетителям, которые мечтают разбогатеть на гэмблинге, настоятельно рекомендую прочитать либо ещё раз перечитать вводную статью по [теории вероятностей](http://www.mathprofi.ru/teorija_verojatnostei.html).

Везения в главном!