**Тема 6. Приближение функций с помощью рядов**

**Приближение функций с помощью рядов. Ряд Маклорена**.

Цель учебного занятия: познакомиться с понятием числового ряда и основными признаками их сходимости, необходимым и достаточным признаками сходимости числового ряда, с “эталонными рядами”. Умения и навыки, которые должны приобрести студенты на занятии: исследовать числовые ряды с положительными членами на сходимость.

Рассмотрим задачу разложения некоторой функции в степенной ряд.

Пусть задана функция, имеющая на некотором отрезке производные всех порядков, тогда она разлагается на этом отрезке в ряд вида

,

который называется **рядом Тейлора.** Здесь-- заданное число.

Формально ряд Тейлора можно написать для всякой функции, которая в окрестности точки имеет производные любого порядка. Однако этот ряд будет сходиться к породившей ее функции только при тех значениях, при которых остаток ряда стремиться к нулю:

.

Остаток ряда Тейлора записывается в форме Лагранжа следующим образом:

,

где заключено междуи.

Если , то получаем частный случай ряда Тейлора, который называется **рядом Маклорена:**

.

Рассмотрим ряды Маклорена для некоторых элементарных функций.

.



 **Примеры разложения функций в ряд Маклорена**

Пример 1

Разложить функцию в ряд Маклорена. Найти область сходимости полученного ряда.

***!****Эквивалентная формулировка: Разложить функцию в ряд по степеням *



Решение незамысловато, главное, быть внимательным.

Конструируем наш ряд. Плясать начинают, как правило, от функции, разложение которой есть в таблице:

.

В данном случае :



Раскрываем наверху скобки:


Теперь умножаем обе части на «икс»:


В итоге искомое разложение функции в ряд:


Как определить область сходимости? Чем постоянно проводить очевидные рассуждения, проще запомнить: разложения **синуса**, **косинуса** и **экспоненты** сходятся при любом действительном значении  *(за исключением, конечно, тех случаев, когда, например,  – см. комментарии к*[***табличным разложениям***](http://www.mathprofi.ru/tablica_razlozhenij_funkcij_v_ryady.pdf)*)*. Домножение  на «икс» не играет никакой роли в плане сходимости, поэтому [**область сходимости**](http://www.mathprofi.ru/funkcionalnye_i_stepennye_ryady.html) полученного ряда: 

Пример 2

Разложить функцию в ряд по степеням . Найти область сходимости ряда.


Это пример для самостоятельного решения.

Я не стал рассматривать простейшие разложения вроде ,  или , поскольку это фактически задача в одно действие. В нужные табличные разложения вместо «альфы» необходимо подставить , ,  и немного причесать полученные ряды. **Единственное предостережение – не теряйте по невнимательности степени и знаки**.

А сейчас для разнообразия рассмотрим что-нибудь с минусами.

Пример 3

Разложить функцию в ряд по степеням . Найти область сходимости ряда.


В таблице находим похожее разложение:


Трюк прост – перепишем нашу функцию немного по-другому:


Таким образом,  и:

Окончательно:


Теперь нужно определить область сходимости. Согласно таблице, ряд сходится при .
В данном случае :



Так как квадрат неотрицателен, то при [**раскрытии модуля**](http://www.mathprofi.ru/goryachie_formuly.pdf) знак «минус» просто испаряется:


Исследуем сходимость ряда на концах найденного интервала. Значения ,  не входят в [**область определения**](http://www.mathprofi.ru/oblast_opredeleniya.html) функции , но как мы видели в Примере 2, в «проблемной» точке САМ РЯД сходиться может. И поэтому от греха подальше лучше выполнить прямую подстановку концов интервала в найденное разложение. При  получаем:  – расходящийся гармонический ряд. И он же получается при 

Таким образом, область сходимости ряда:


Но так бывает далеко не всегда:

Простейшее разложение из учебника  сходится ещё в одной точке: . Здесь значение  тоже вне игры, а вот при  [**сумма**](http://www.mathprofi.ru/kak_naiti_summu_ryada.html) получившегося [**знакочередующегося ряда**](http://www.mathprofi.ru/priznak_leibnica_primery_reshenii.html)  в точности равна .

Интересно отметить, что разложение в ряд такого логарифма:

 – сходится уже на обоих концах интервала:  (при подстановках ,  получается тот же самый сходящийся ряд )

Таким образом, с логарифмами нужно работать осмотрительно!

Пара примеров для самостоятельного решения:

Пример 4

Разложить функцию в ряд по степеням . Найти область сходимости ряда.


Пляска традиционно начинается от «главной» функции, то есть, начинать нужно с экспоненты.

Пример 5

Разложить функцию в ряд по степеням . Найти область сходимости ряда.


Здесь разложение не такое сложное, но могут возникнуть трудности с нахождением области сходимости полученного ряда.

Полные решения и ответы в конце урока.

Не редкость, когда перед разложением функции в ряд её необходимо предварительно преобразовать. Канонический случай – это разложение функции . Перед тем как ее раскладывать в ряд, необходимо понизить степень с помощью известной тригонометрической формулы: . Решать я этот пример не буду, поскольку он довольно простой, к тому же что-то подобное мы недавно рассмотрели.

Пример 6

Разложить функцию в ряд по степеням . Найти область сходимости ряда.


Смотрим в таблицу и находим наиболее похожее разложение:


Во-первых, вверху должна быть единица, поэтому представляем нашу функцию в виде произведения: 
Теперь нам нужно в знаменателе устроить , для этого выносим двойку за скобки:

И сокращаем на два:

В данном случае , таким образом:


В итоге искомое разложение:


Определим область сходимости ряда. Можно пойти длинным и надежным путем – использовать признак Даламберадля полученногостепенного ряда , т.е. найти [**интервал сходимости**](http://www.mathprofi.ru/funkcionalnye_i_stepennye_ryady.html) и т.д. Но можно поступить проще. В таблице указано, что биномиальный ряд сходится при . В данном случае , поэтому:

Умножаем все части неравенства на :
 – интервал сходимости полученного ряда.
Что происходит с рядом  на концах интервала?

При   получаем:  – данный ряд расходится, т.к. не выполнен [**необходимый признак сходимости**](http://www.mathprofi.ru/ryady_dlya_chajnikov.html#npsr),

и при:  – расходится по той же причине.

Таким образом, область сходимости полученного ряда: 

Пример 7

Разложить функцию в ряд по степеням . Найти область сходимости ряда.


Указание: предварительно функцию следует упростить, используя свойство логарифмов: 

Степенные ряды широко используются в приближенных вычислениях. Рассмотрим применение рядов Тейлора для приближенного вычисления значений функций, значений определенных интегралов и приближенного решения дифференциальных уравнений.

**Задача №3.**Вычислитьприближенно с точностью 0,0001.

Решение. Для любогоимеет место формула:

.

При получим

.

Оценим погрешность вычислений с помощью остаточного члена в форме Лагранжа:

.

Так как

, то

,

где лежит междуи.

При имеем

,

где .

Учитывая, что , получим

.

При 

.

При 

.

Таким образом, для достижения требуемой точности достаточно взять (или более):

.

Каждое слагаемое вычислим с одним дополнительным знаком после запятой, чтобы к нашей ошибке не добавлялись ошибки от округления:

.

Ответ: с точностью 0,0001 .

**Задача №4.**Вычислитьприближенно с точностью 0,0001.

Решение.Для вычислениябудем использовать биномиальный ряд, который сходится только при, поэтому сначала преобразуем данный корень:

.

В биномиальном ряде положим :



.

Данный знакочередующийся числовой ряд является рядом Лейбница. Чтобы определить, сколько взять первых членов ряда для вычисления с точностью 0,0001, вычислим последовательно несколько первых членов ряда:

.

Согласно свойству ряда Лейбница, если оставить первые три слагаемые, то ошибка искомого приближенного значения корня будет меньше :

,

следовательно,

.

Ответ: с точностью 0,0001 

Пусть необходимо посчитать определенный интеграл



от некоторой функции, первообразная которой не вычисляется в элементарных функциях. Следовательно, формулу Ньютона-Лейбница применить не удается. Еслиразложима в степенной ряд на отрезке, принадлежащем области сходимости ряда, то интеграл может быть вычислен приближенно. Иногда приближенного вычисления бывает достаточно и при наличии первообразной функции. Для решения такой задачи используются ряды Тейлора. Рассмотрим примеры.

**Задача №5.**Вычислить определенный интегралс точностью 0,01.

Решение.Заметим, что этот широко используемый интеграл не выражается в элементарных функциях.

В ряде Маклорена для функции сделаем замену:

.

Теперь воспользуемся теоремой о том, что степенной ряд можно почленно интегрировать по любому отрезку, принадлежащему интервалу сходимости. Данный ряд сходится на всей числовой прямой, следовательно, его можно интегрировать по любому отрезку, в том числе по отрезку :



Мы получили числовой ряд, который равен значению определенного интеграла.

Оценим погрешность вычислений. Данный ряд – это ряд Лейбница, следовательно, погрешность вычислений не превосходит по модулю первого отброшенного члена ряда. Поэтому, вычисляя по порядку члены ряда, первым отбросим тот, который окажется по модулю меньше заданной точности:

,

.

Тогда 024=0,743.

Ответ:0,743.