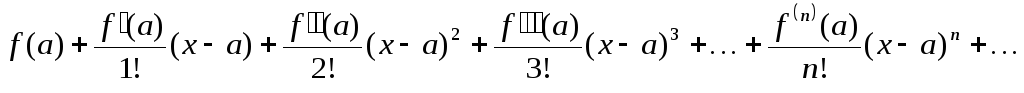
**Тема 6. Приближение функций с помощью рядов**

**Приближение функций с помощью рядов. Ряд Маклорена**.

Цель учебного занятия: познакомиться с понятием числового ряда и основными признаками их сходимости, необходимым и достаточным признаками сходимости числового ряда, с “эталонными рядами”. Умения и навыки, которые должны приобрести студенты на занятии: исследовать числовые ряды с положительными членами на сходимость.

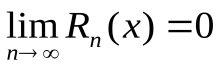
Рассмотрим задачу разложения некоторой функции в степенной ряд.

Пусть задана функцияhttps://studfile.net/html/2706/131/html_BI7MsKrpHP.aJY3/img-STT6rm.png, имеющая на некотором отрезке производные всех порядков, тогда она разлагается на этом отрезке в ряд вида

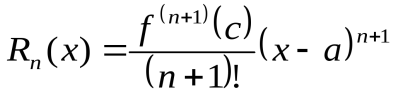
,

который называется **рядом Тейлора.** Здесьhttps://studfile.net/html/2706/131/html_BI7MsKrpHP.aJY3/img-lOM8jA.png-- заданное число.

Формально ряд Тейлора можно написать для всякой функции, которая в окрестности точки https://studfile.net/html/2706/131/html_BI7MsKrpHP.aJY3/img-281Rqo.pngимеет производные любого порядка. Однако этот ряд будет сходиться к породившей ее функции только при тех значенияхhttps://studfile.net/html/2706/131/html_BI7MsKrpHP.aJY3/img-e77aae.png, при которых остаток ряда стремиться к нулю:

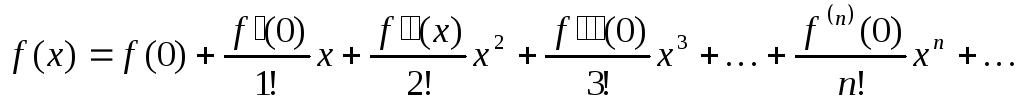
.

Остаток ряда Тейлора записывается в форме Лагранжа следующим образом:

,

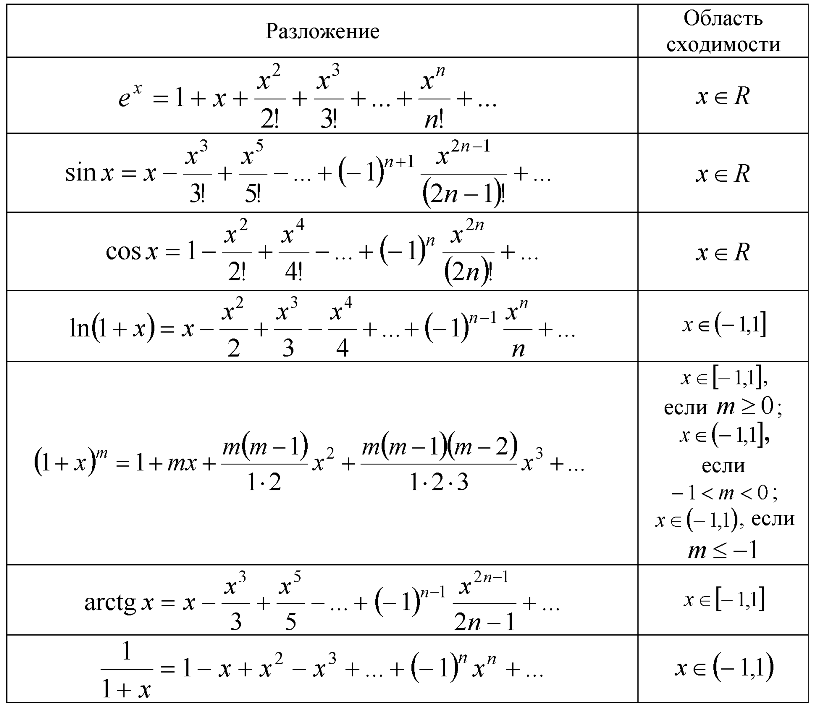
где https://studfile.net/html/2706/131/html_BI7MsKrpHP.aJY3/img-tj1xdM.pngзаключено междуhttps://studfile.net/html/2706/131/html_BI7MsKrpHP.aJY3/img-XpBPhK.pngиhttps://studfile.net/html/2706/131/html_BI7MsKrpHP.aJY3/img-aaoEE6.png.

Если https://studfile.net/html/2706/131/html_BI7MsKrpHP.aJY3/img-ZNKOWL.png, то получаем частный случай ряда Тейлора, который называется **рядом Маклорена:**

.

Рассмотрим ряды Маклорена для некоторых элементарных функций.

.



**Примеры разложения функций в ряд Маклорена**

Пример 1

Разложить функцию в ряд Маклорена. Найти область сходимости полученного ряда.

***!****Эквивалентная формулировка: Разложить функцию в ряд по степеням http://www.mathprofi.ru/g/razlozhenie_funkcij_v_stepennye_ryady_clip_image058_0000.gif*

http://www.mathprofi.ru/g/razlozhenie_funkcij_v_stepennye_ryady_clip_image083.gif

Решение незамысловато, главное, быть внимательным.

Конструируем наш ряд. Плясать начинают, как правило, от функции, разложение которой есть в таблице:

http://www.mathprofi.ru/g/razlozhenie_funkcij_v_stepennye_ryady_clip_image085.gif.

В данном случае http://www.mathprofi.ru/g/razlozhenie_funkcij_v_stepennye_ryady_clip_image089.gif:

http://www.mathprofi.ru/g/razlozhenie_funkcij_v_stepennye_ryady_clip_image091.gif

Раскрываем наверху скобки:  
http://www.mathprofi.ru/g/razlozhenie_funkcij_v_stepennye_ryady_clip_image093.gif

Теперь умножаем обе части на «икс»:  
http://www.mathprofi.ru/g/razlozhenie_funkcij_v_stepennye_ryady_clip_image095.gif

В итоге искомое разложение функции в ряд:  
http://www.mathprofi.ru/g/razlozhenie_funkcij_v_stepennye_ryady_clip_image097.gif

Как определить область сходимости? Чем постоянно проводить очевидные рассуждения, проще запомнить: разложения **синуса**, **косинуса** и **экспоненты** сходятся при любом действительном значении http://www.mathprofi.ru/g/razlozhenie_funkcij_v_stepennye_ryady_clip_image058_0000.gif *(за исключением, конечно, тех случаев, когда, например, http://www.mathprofi.ru/g/razlozhenie_funkcij_v_stepennye_ryady_clip_image510.gif – см. комментарии к*[***табличным разложениям***](http://www.mathprofi.ru/tablica_razlozhenij_funkcij_v_ryady.pdf)*)*. Домножение http://www.mathprofi.ru/g/razlozhenie_funkcij_v_stepennye_ryady_clip_image099.gif на «икс» не играет никакой роли в плане сходимости, поэтому [**область сходимости**](http://www.mathprofi.ru/funkcionalnye_i_stepennye_ryady.html) полученного ряда: http://www.mathprofi.ru/g/razlozhenie_funkcij_v_stepennye_ryady_clip_image017_0001.gif

Пример 2

Разложить функцию в ряд по степеням http://www.mathprofi.ru/g/razlozhenie_funkcij_v_stepennye_ryady_clip_image058_0001.gif. Найти область сходимости ряда.  
http://www.mathprofi.ru/g/razlozhenie_funkcij_v_stepennye_ryady_clip_image103.gif

Это пример для самостоятельного решения.

Я не стал рассматривать простейшие разложения вроде http://www.mathprofi.ru/g/razlozhenie_funkcij_v_stepennye_ryady_clip_image105.gif, http://www.mathprofi.ru/g/razlozhenie_funkcij_v_stepennye_ryady_clip_image107.gif или http://www.mathprofi.ru/g/razlozhenie_funkcij_v_stepennye_ryady_clip_image109.gif, поскольку это фактически задача в одно действие. В нужные табличные разложения вместо «альфы» необходимо подставить http://www.mathprofi.ru/g/razlozhenie_funkcij_v_stepennye_ryady_clip_image111.gif, http://www.mathprofi.ru/g/razlozhenie_funkcij_v_stepennye_ryady_clip_image113.gif, http://www.mathprofi.ru/g/razlozhenie_funkcij_v_stepennye_ryady_clip_image115.gif и немного причесать полученные ряды. **Единственное предостережение – не теряйте по невнимательности степени и знаки**.

А сейчас для разнообразия рассмотрим что-нибудь с минусами.

Пример 3

Разложить функцию в ряд по степеням http://www.mathprofi.ru/g/razlozhenie_funkcij_v_stepennye_ryady_clip_image058_0002.gif. Найти область сходимости ряда.  
http://www.mathprofi.ru/g/razlozhenie_funkcij_v_stepennye_ryady_clip_image117.gif

В таблице находим похожее разложение:  
http://www.mathprofi.ru/g/razlozhenie_funkcij_v_stepennye_ryady_clip_image119.gif

Трюк прост – перепишем нашу функцию немного по-другому:  
http://www.mathprofi.ru/g/razlozhenie_funkcij_v_stepennye_ryady_clip_image123.gif

Таким образом, http://www.mathprofi.ru/g/razlozhenie_funkcij_v_stepennye_ryady_clip_image125.gif и:  
http://www.mathprofi.ru/g/razlozhenie_funkcij_v_stepennye_ryady_clip_image127.gif  
Окончательно:  
http://www.mathprofi.ru/g/razlozhenie_funkcij_v_stepennye_ryady_clip_image129.gif

Теперь нужно определить область сходимости. Согласно таблице, ряд сходится при http://www.mathprofi.ru/g/razlozhenie_funkcij_v_stepennye_ryady_clip_image500.gif.  
В данном случае http://www.mathprofi.ru/g/razlozhenie_funkcij_v_stepennye_ryady_clip_image125_0000.gif:

http://www.mathprofi.ru/g/razlozhenie_funkcij_v_stepennye_ryady_clip_image501.gif

Так как квадрат неотрицателен, то при [**раскрытии модуля**](http://www.mathprofi.ru/goryachie_formuly.pdf) знак «минус» просто испаряется:  
http://www.mathprofi.ru/g/razlozhenie_funkcij_v_stepennye_ryady_clip_image502.gif

Исследуем сходимость ряда на концах найденного интервала. Значения http://www.mathprofi.ru/g/razlozhenie_funkcij_v_stepennye_ryady_clip_image136.gif, http://www.mathprofi.ru/g/razlozhenie_funkcij_v_stepennye_ryady_clip_image138.gif не входят в [**область определения**](http://www.mathprofi.ru/oblast_opredeleniya.html) функции http://www.mathprofi.ru/g/razlozhenie_funkcij_v_stepennye_ryady_clip_image117.gif, но как мы видели в Примере 2, в «проблемной» точке САМ РЯД сходиться может. И поэтому от греха подальше лучше выполнить прямую подстановку концов интервала в найденное разложение. При http://www.mathprofi.ru/g/razlozhenie_funkcij_v_stepennye_ryady_clip_image136.gif получаем: http://www.mathprofi.ru/g/razlozhenie_funkcij_v_stepennye_ryady_clip_image800.gif – расходящийся гармонический ряд. И он же получается при http://www.mathprofi.ru/g/razlozhenie_funkcij_v_stepennye_ryady_clip_image138.gif

Таким образом, область сходимости ряда:  
http://www.mathprofi.ru/g/razlozhenie_funkcij_v_stepennye_ryady_clip_image134.gif

Но так бывает далеко не всегда:

Простейшее разложение из учебника http://www.mathprofi.ru/g/razlozhenie_funkcij_v_stepennye_ryady_clip_image143.gif сходится ещё в одной точке: http://www.mathprofi.ru/g/razlozhenie_funkcij_v_stepennye_ryady_clip_image145.gif. Здесь значение http://www.mathprofi.ru/g/razlozhenie_funkcij_v_stepennye_ryady_clip_image138.gif тоже вне игры, а вот при http://www.mathprofi.ru/g/razlozhenie_funkcij_v_stepennye_ryady_clip_image136.gif [**сумма**](http://www.mathprofi.ru/kak_naiti_summu_ryada.html) получившегося [**знакочередующегося ряда**](http://www.mathprofi.ru/priznak_leibnica_primery_reshenii.html) http://www.mathprofi.ru/g/razlozhenie_funkcij_v_stepennye_ryady_clip_image503.gif в точности равна http://www.mathprofi.ru/g/razlozhenie_funkcij_v_stepennye_ryady_clip_image504.gif.

Интересно отметить, что разложение в ряд такого логарифма:

http://www.mathprofi.ru/g/razlozhenie_funkcij_v_stepennye_ryady_clip_image147.gif – сходится уже на обоих концах интервала: http://www.mathprofi.ru/g/razlozhenie_funkcij_v_stepennye_ryady_clip_image008_0002.gif (при подстановках http://www.mathprofi.ru/g/razlozhenie_funkcij_v_stepennye_ryady_clip_image136.gif, http://www.mathprofi.ru/g/razlozhenie_funkcij_v_stepennye_ryady_clip_image138.gif получается тот же самый сходящийся ряд http://www.mathprofi.ru/g/razlozhenie_funkcij_v_stepennye_ryady_clip_image503.gif)

Таким образом, с логарифмами нужно работать осмотрительно!

Пара примеров для самостоятельного решения:

Пример 4

Разложить функцию в ряд по степеням http://www.mathprofi.ru/g/razlozhenie_funkcij_v_stepennye_ryady_clip_image058_0003.gif. Найти область сходимости ряда.  
http://www.mathprofi.ru/g/razlozhenie_funkcij_v_stepennye_ryady_clip_image150.gif

Пляска традиционно начинается от «главной» функции, то есть, начинать нужно с экспоненты.

Пример 5

Разложить функцию в ряд по степеням http://www.mathprofi.ru/g/razlozhenie_funkcij_v_stepennye_ryady_clip_image058_0004.gif. Найти область сходимости ряда.  
http://www.mathprofi.ru/g/razlozhenie_funkcij_v_stepennye_ryady_clip_image152.gif

Здесь разложение не такое сложное, но могут возникнуть трудности с нахождением области сходимости полученного ряда.

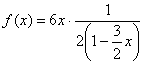
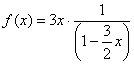
Полные решения и ответы в конце урока.

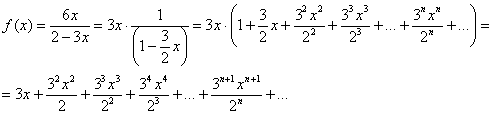
Не редкость, когда перед разложением функции в ряд её необходимо предварительно преобразовать. Канонический случай – это разложение функции http://www.mathprofi.ru/g/razlozhenie_funkcij_v_stepennye_ryady_clip_image154.gif. Перед тем как ее раскладывать в ряд, необходимо понизить степень с помощью известной тригонометрической формулы: http://www.mathprofi.ru/g/razlozhenie_funkcij_v_stepennye_ryady_clip_image156.gif. Решать я этот пример не буду, поскольку он довольно простой, к тому же что-то подобное мы недавно рассмотрели.

Пример 6

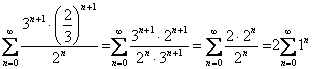
Разложить функцию в ряд по степеням http://www.mathprofi.ru/g/razlozhenie_funkcij_v_stepennye_ryady_clip_image058_0005.gif. Найти область сходимости ряда.  
http://www.mathprofi.ru/g/razlozhenie_funkcij_v_stepennye_ryady_clip_image158.gif

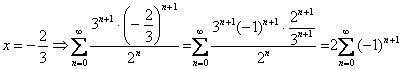
Смотрим в таблицу и находим наиболее похожее разложение:  
http://www.mathprofi.ru/g/razlozhenie_funkcij_v_stepennye_ryady_clip_image160.gif

Во-первых, вверху должна быть единица, поэтому представляем нашу функцию в виде произведения: http://www.mathprofi.ru/g/razlozhenie_funkcij_v_stepennye_ryady_clip_image162.gif  
Теперь нам нужно в знаменателе устроить http://www.mathprofi.ru/g/razlozhenie_funkcij_v_stepennye_ryady_clip_image164.gif, для этого выносим двойку за скобки:  
  
И сокращаем на два:  
  
В данном случае http://www.mathprofi.ru/g/razlozhenie_funkcij_v_stepennye_ryady_clip_image170.gif, таким образом:  


В итоге искомое разложение:  


Определим область сходимости ряда. Можно пойти длинным и надежным путем – использовать признак Даламберадля полученногостепенного ряда http://www.mathprofi.ru/g/razlozhenie_funkcij_v_stepennye_ryady_clip_image176.gif, т.е. найти [**интервал сходимости**](http://www.mathprofi.ru/funkcionalnye_i_stepennye_ryady.html) и т.д. Но можно поступить проще. В таблице указано, что биномиальный ряд сходится при http://www.mathprofi.ru/g/razlozhenie_funkcij_v_stepennye_ryady_clip_image121_0001.gif. В данном случае http://www.mathprofi.ru/g/razlozhenie_funkcij_v_stepennye_ryady_clip_image170_0000.gif, поэтому:  
http://www.mathprofi.ru/g/razlozhenie_funkcij_v_stepennye_ryady_clip_image180.gif  
Умножаем все части неравенства на http://www.mathprofi.ru/g/razlozhenie_funkcij_v_stepennye_ryady_clip_image182.gif:  
http://www.mathprofi.ru/g/razlozhenie_funkcij_v_stepennye_ryady_clip_image184.gif – интервал сходимости полученного ряда.  
Что происходит с рядом http://www.mathprofi.ru/g/razlozhenie_funkcij_v_stepennye_ryady_clip_image176_0000.gif на концах интервала?

При  http://www.mathprofi.ru/g/razlozhenie_funkcij_v_stepennye_ryady_clip_image505.gif получаем:  – данный ряд расходится, т.к. не выполнен [**необходимый признак сходимости**](http://www.mathprofi.ru/ryady_dlya_chajnikov.html#npsr),

и при:  – расходится по той же причине.

Таким образом, область сходимости полученного ряда: http://www.mathprofi.ru/g/razlozhenie_funkcij_v_stepennye_ryady_clip_image184_0000.gif

Пример 7

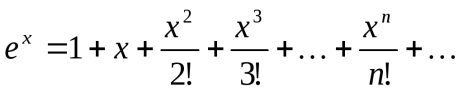
Разложить функцию в ряд по степеням http://www.mathprofi.ru/g/razlozhenie_funkcij_v_stepennye_ryady_clip_image058_0006.gif. Найти область сходимости ряда.  
http://www.mathprofi.ru/g/razlozhenie_funkcij_v_stepennye_ryady_clip_image191.gif

Указание: предварительно функцию следует упростить, используя свойство логарифмов: http://www.mathprofi.ru/g/razlozhenie_funkcij_v_stepennye_ryady_clip_image193.gif

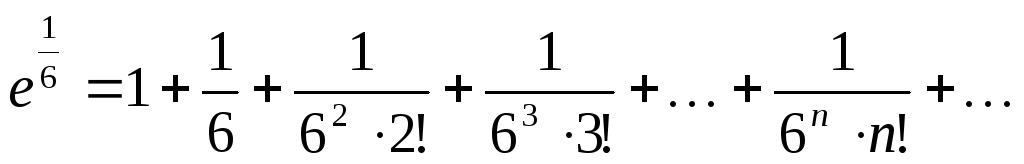
Степенные ряды широко используются в приближенных вычислениях. Рассмотрим применение рядов Тейлора для приближенного вычисления значений функций, значений определенных интегралов и приближенного решения дифференциальных уравнений.

**Задача №3.**Вычислитьhttps://studfile.net/html/2706/131/html_BI7MsKrpHP.aJY3/img-CNEENs.pngприближенно с точностью 0,0001.

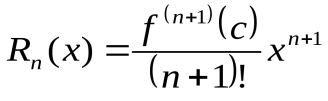
Решение. Для любогоhttps://studfile.net/html/2706/131/html_BI7MsKrpHP.aJY3/img-AZggJ4.pngимеет место формула:

.

При получим

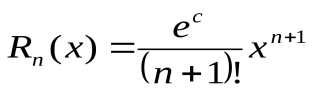
.

Оценим погрешность вычислений с помощью остаточного члена в форме Лагранжа:

.

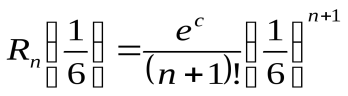
Так как

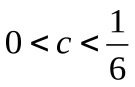
https://studfile.net/html/2706/131/html_BI7MsKrpHP.aJY3/img-e7pUVs.png, то

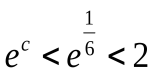
,

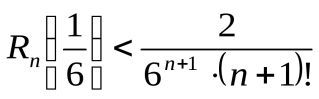
где https://studfile.net/html/2706/131/html_BI7MsKrpHP.aJY3/img-7uIu_k.pngлежит междуhttps://studfile.net/html/2706/131/html_BI7MsKrpHP.aJY3/img-6l10QP.pngиhttps://studfile.net/html/2706/131/html_BI7MsKrpHP.aJY3/img-JDq4ak.png.

При имеем

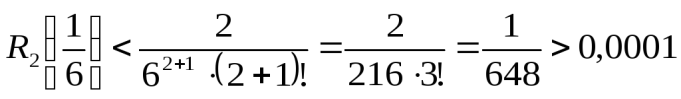
,

где .

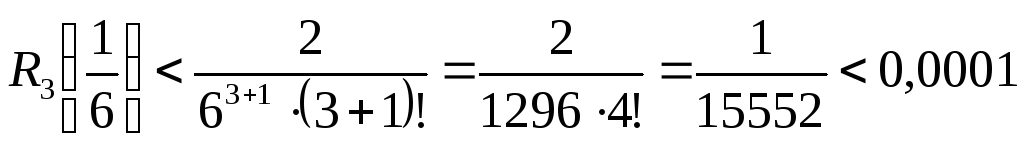
Учитывая, что , получим

.

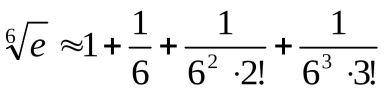
При https://studfile.net/html/2706/131/html_BI7MsKrpHP.aJY3/img-F8MFCd.png

.

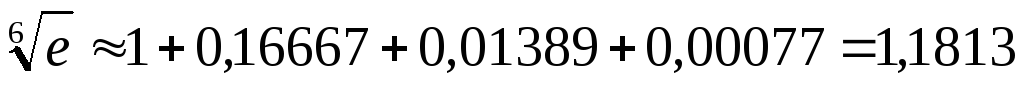
При https://studfile.net/html/2706/131/html_BI7MsKrpHP.aJY3/img-Gd3cB8.png

.

Таким образом, для достижения требуемой точности достаточно взять https://studfile.net/html/2706/131/html_BI7MsKrpHP.aJY3/img-_Wfa5K.png(или более):

.

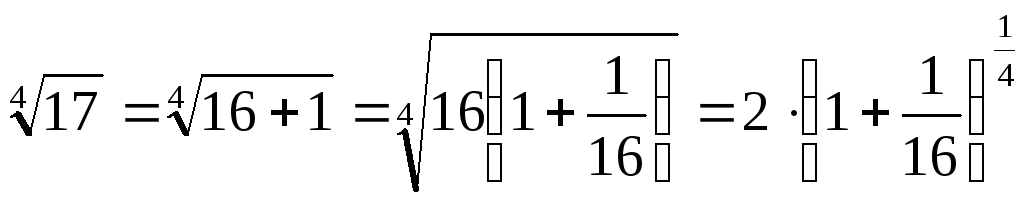
Каждое слагаемое вычислим с одним дополнительным знаком после запятой, чтобы к нашей ошибке не добавлялись ошибки от округления:

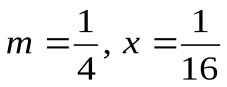
.

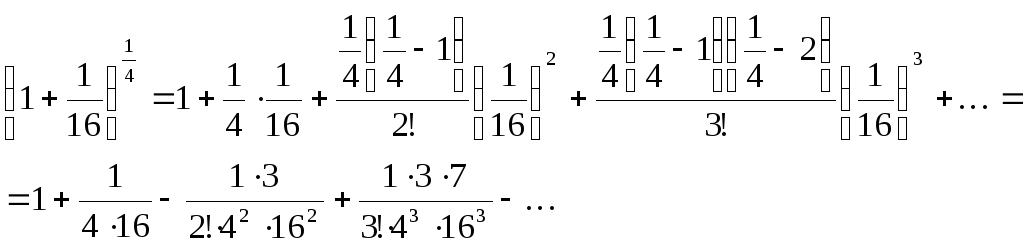
Ответ: с точностью 0,0001 https://studfile.net/html/2706/131/html_BI7MsKrpHP.aJY3/img-J2UCjz.png.

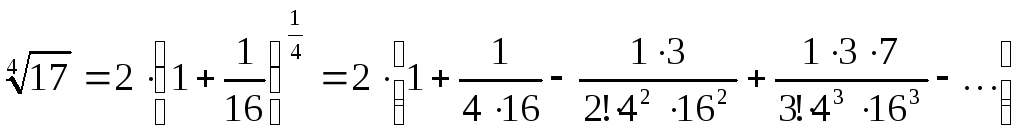
**Задача №4.**Вычислитьhttps://studfile.net/html/2706/131/html_BI7MsKrpHP.aJY3/img-mA3e_q.pngприближенно с точностью 0,0001.

Решение.Для вычисленияhttps://studfile.net/html/2706/131/html_BI7MsKrpHP.aJY3/img-M1KDAa.pngбудем использовать биномиальный ряд, который сходится только приhttps://studfile.net/html/2706/131/html_BI7MsKrpHP.aJY3/img-tdhXYW.png, поэтому сначала преобразуем данный корень:

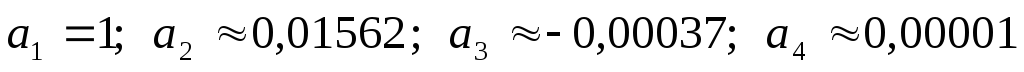
.

В биномиальном ряде положим :



.

Данный знакочередующийся числовой ряд является рядом Лейбница. Чтобы определить, сколько взять первых членов ряда для вычисления https://studfile.net/html/2706/131/html_BI7MsKrpHP.aJY3/img-GrNa5d.pngс точностью 0,0001, вычислим последовательно несколько первых членов ряда:

.

Согласно свойству ряда Лейбница, если оставить первые три слагаемые, то ошибка искомого приближенного значения корня будет меньше https://studfile.net/html/2706/131/html_BI7MsKrpHP.aJY3/img-TNcgpL.png:

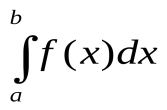
https://studfile.net/html/2706/131/html_BI7MsKrpHP.aJY3/img-ySoAn8.png,

следовательно,

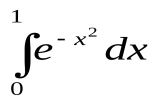
https://studfile.net/html/2706/131/html_BI7MsKrpHP.aJY3/img-C5IlQP.png.

Ответ: с точностью 0,0001 https://studfile.net/html/2706/131/html_BI7MsKrpHP.aJY3/img-HxtC6e.png

Пусть необходимо посчитать определенный интеграл

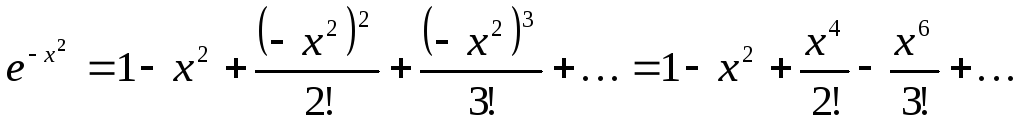


от некоторой функцииhttps://studfile.net/html/2706/131/html_BI7MsKrpHP.aJY3/img-0dFgPl.png, первообразная которой не вычисляется в элементарных функциях. Следовательно, формулу Ньютона-Лейбница применить не удается. Еслиhttps://studfile.net/html/2706/131/html_BI7MsKrpHP.aJY3/img-nJd8nd.pngразложима в степенной ряд на отрезкеhttps://studfile.net/html/2706/131/html_BI7MsKrpHP.aJY3/img-XQHItx.png, принадлежащем области сходимости ряда, то интеграл может быть вычислен приближенно. Иногда приближенного вычисления бывает достаточно и при наличии первообразной функции. Для решения такой задачи используются ряды Тейлора. Рассмотрим примеры.

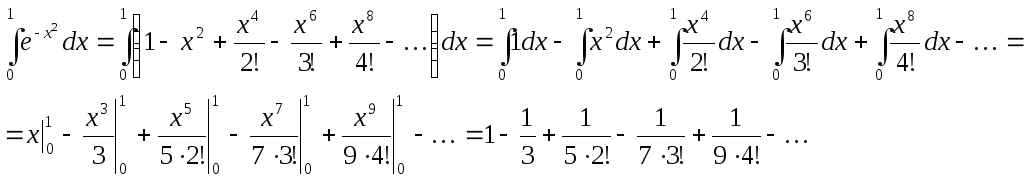
**Задача №5.**Вычислить определенный интегралс точностью 0,01.

Решение.Заметим, что этот широко используемый интеграл не выражается в элементарных функциях.

В ряде Маклорена для функции https://studfile.net/html/2706/131/html_BI7MsKrpHP.aJY3/img-NJwvcH.pngсделаем заменуhttps://studfile.net/html/2706/131/html_BI7MsKrpHP.aJY3/img-dXYaGT.png:

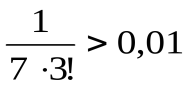
.

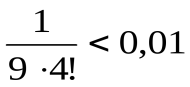
Теперь воспользуемся теоремой о том, что степенной ряд можно почленно интегрировать по любому отрезку, принадлежащему интервалу сходимости. Данный ряд сходится на всей числовой прямой, следовательно, его можно интегрировать по любому отрезку, в том числе по отрезку https://studfile.net/html/2706/131/html_BI7MsKrpHP.aJY3/img-znf0au.png:

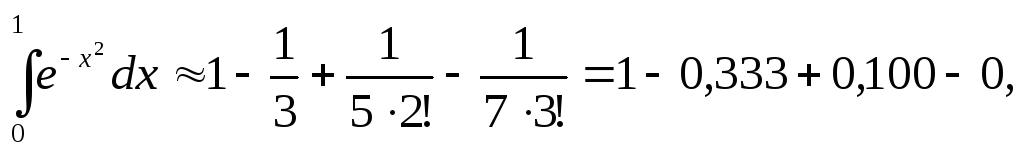


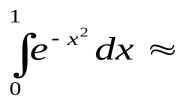
Мы получили числовой ряд, который равен значению определенного интеграла.

Оценим погрешность вычислений. Данный ряд – это ряд Лейбница, следовательно, погрешность вычислений не превосходит по модулю первого отброшенного члена ряда. Поэтому, вычисляя по порядку члены ряда, первым отбросим тот, который окажется по модулю меньше заданной точности:

,

.

Тогда https://studfile.net/html/2706/131/html_BI7MsKrpHP.aJY3/img-7OmEeH.png024=0,743.

Ответ:0,743.