**Метод касательных1**

**Метод касательных** (метод Ньютона) предназначен для приближенного нахождения *нулей функции*, и сегодня мы не только узнаем его суть, но и научимся быстро решать тематическую задачу! В которой чаще всего фигурирует «обычная» [**функция одной переменной**](http://www.mathprofi.ru/mnozhestva.html)  и соответствующее [**уравнение**](http://www.mathprofi.ru/uravnenija_v_vysshei_matematike.html) . Например:



Поставим задачу отыскать [**действительные**](http://www.mathprofi.ru/mnozhestva.html) корни данного уравнения.

А таковые точно есть! – из статей о [**графиках функций**](http://www.mathprofi.ru/grafiki_i_svoistva_funkcij.html) и [**уравнениях высшей математики**](http://www.mathprofi.ru/uravnenija_v_vysshei_matematike.html) вы хорошо знаете, что график *функции-многочлена*  *нечётной степени* хотя бы один раз пересекает ось , следовательно, наше уравнение имеет *по меньшей мере* один действительный корень. Один. Или два. Или три.

Сначала напрашивается проверить, наличие [**рациональных**](http://www.mathprofi.ru/mnozhestva.html) корней. Согласно [**соответствующей теореме**](http://www.mathprofi.ru/uravnenija_v_vysshei_matematike.html), на это «звание» могут претендовать лишь числа 1, –1, 3, –3, и прямой подстановкой легко убедиться, что ни одно из них «не подходит». Таким образом, остаются иррациональные значения. Иррациональный корень (корни) многочлена 3-й степени можно найти точно *(выразить через радикалы)* с помощью так называемых [***формул Кардано***](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D0%BE%D1%80%D0%BC%D1%83%D0%BB%D0%B0_%D0%9A%D0%B0%D1%80%D0%B4%D0%B0%D0%BD%D0%BE), однако этот метод достаточно громоздок. А для многочленов 5-й и бОльших степеней общего аналитического метода не существует вовсе, и, кроме того, на практике встречается множество других уравнений, в которых точные значения действительных корней получить невозможно (хотя они существуют).

Однако в прикладных *(например, инженерных)* задачах более чем допустимо использовать приближённые значения, вычисленные с определённой точностью.

Зададим для нашего примера точность . Что это значит? Это значит, что нам нужно отыскать ТАКОЕ приближённое значение корня  *(корней)*, в котором мы гарантированно ошибаемся, не более чем на 0,001 *(одну тысячную)*.

Совершенно понятно, что решение нельзя начинать «наобум» и поэтому на первом шаге корни **отделяют**. Отделить корень – это значит найти достаточно малый (как правило, единичный) отрезок, которому этот корень принадлежит, и на котором нет других корней. Наиболее прост и доступен **графический метод отделения корней**. Построим **[поточечно](http://www.mathprofi.ru/grafiki_i_svoistva_funkcij.html)** график функции :
****
Из чертежа следует, что уравнение , судя по всему, имеет единственный действительный корень , принадлежащий отрезку . На концах данного промежутка функция  принимает значения разных знаков: , и из факта [**непрерывности функции на отрезке**](http://www.mathprofi.ru/nepreryvnost_funkcii_i_tochki_razryva.html) сразу виден элементарный способ уточнения корня: делим промежуток  пополам  и выбираем тот отрезок, на концах которого функция принимает разные знаки. В данном случае это, очевидно, отрезок . Делим полученный промежуток пополам и снова выбираем «разнознаковый» отрезок. И так далее. Подобные последовательные действия называют *итерациями*.  В данном случае их следует проводить до тех пор, пока длина отрезка не станет меньше удвоенной точности вычислений , и за приближённое значение корня следует выбрать середину последнего «разнознакового» отрезка.

Рассмотренная схема получила естественное название – **метод половинного деления**. И недостаток этого метода состоит в скорости. Медленно. Очень медленно. Слишком много итераций придётся совершить, прежде чем мы достигнем требуемой точности. С развитием вычислительной техники это, конечно, не проблема, но математика – на то и математика, чтобы искать наиболее рациональные пути решения.

И одним из более эффективных способов нахождения приближённого значения корня как раз и является **метод касательных**. Краткая геометрическая суть метода состоит в следующем: сначала с помощью специального критерия *(о котором чуть позже)* выбирается один из концов отрезка. Этот конец называют *начальным* приближением корня, в нашем примере: . Теперь проводим касательную к графику функции  в точке с абсциссой  *(синяя точка и фиолетовая касательная)*:
****
Данная касательная пересекла ось абсцисс в жёлтой точке, и обратите внимание, что на первом шаге мы уже почти «попали в корень»! Это будет *первое* приближение корня . Далее опускаем жёлтый перпендикуляр к графику функции и «попадаем» в оранжевую точку. Через оранжевую точку снова проводим касательную, которая пересечёт ось ещё ближе к корню! И так далее. Нетрудно понять, что, используя метод касательных, мы приближаемся к цели семимильными шагами, и для достижения точности  потребуется буквально несколько итераций.

Поскольку касательная определяется через [**производную функции**](http://www.mathprofi.ru/opredelenie_proizvodnoi_smysl_proizvodnoi.html), то этот урок попал в раздел «Производные» в качестве одного из её приложений. И, не вдаваясь в подробное [**теоретическое обоснование метода**](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B5%D1%82%D0%BE%D0%B4_%D0%9D%D1%8C%D1%8E%D1%82%D0%BE%D0%BD%D0%B0), я рассмотрю техническую сторону вопроса. На практике описанная выше задача встречается примерно в такой формулировке:

Пример 1

С помощью графического метода найти промежуток , на котором находится действительный корень  уравнения . Пользуясь методом Ньютона, получить приближенное значение корня с точностью до 0,001

Перед вами «щадящая версия» задания, в которой сразу констатируется наличие единственного действительного корня.

**Решение**: **на первом шаге** следует отделить корень графически. Это можно сделать путём построения графика  *(см. иллюстрации выше)*, но такой подход обладает рядом недостатков. Во-первых, не факт, что график прост *(мы же заранее не знаем)*, а программное обеспечение – оно далеко не всегда под рукой. И, во-вторых *(следствие из 1-го)*, с немалой вероятностью получится даже не схематичный чертёж, а грубый рисунок, что, разумеется, не есть хорошо.

Ну а зачем нам лишние трудности? Представим[**уравнение**](http://www.mathprofi.ru/uravnenija_v_vysshei_matematike.html)  в виде , АККУРАТНО построим графики  и отметим на чертеже корень  *(«иксовую» координату точки пересечения графиков)*:
****
Очевидное преимущество [**этого способа**](http://www.mathprofi.ru/uravnenija_v_vysshei_matematike.html) состоит в том, что графики данных функций строятся от руки значительно точнее и намного быстрее. Кстати, заметьте, что [**прямая**](http://www.mathprofi.ru/uravnenie_pryamoi_na_ploskosti.html) пересекла [**кубическую параболу**](http://www.mathprofi.ru/grafiki_i_svoistva_funkcij.html) в единственной точке, а значит, предложенное уравнение и в самом деле имеет только один действительный корень. Доверяйте, но проверяйте ;-)

Итак, наш «клиент»  принадлежит отрезку  и «на глазок» примерно равен 0,65-0,7.

**На втором шаге** нужно выбрать *начальное приближение*  корня. Обычно это один из концов отрезка. Начальное приближение должно удовлетворять следующему условию:


Найдём[**первую**](http://www.mathprofi.ru/kak_naiti_proizvodnuju.html) и [**вторую**](http://www.mathprofi.ru/tipovye_zadachi_s_proizvodnoi.html) производные функции :


и проверим левый конец отрезка:

Таким образом, ноль «не подошёл».

Проверяем правый конец отрезка:

 – всё хорошо!  В качестве начального приближения выбираем .

**На третьем шаге** нас ожидает дорога к корню. Каждое последующее приближение  корня  рассчитывается на основании предшествующих данных с помощью следующей *рекуррентной* формулы:


Процесс завершается при выполнении условия , где  – заранее заданная точность вычислений. В результате за приближённое значение корня принимается «энное» приближение: .

На очереди рутинные расчёты:

 *(округление обычно проводят до 5-6 знаков после запятой)*

Поскольку полученное значение больше , то переходим к 1-му приближению корня:


Вычисляем:

, поэтому возникает потребность перейти ко 2-му приближению:


Заходим на следующий круг:

, таким образом, итерации закончены, и в качестве приближённого значения корня следует взять 2-е приближение, которое в соответствии с заданной точностью нужно округлить до одной тысячной:



На практике результаты вычислений удобно заносить в таблицу, при этом, чтобы несколько сократить запись, дробь часто обозначают через :


Сами же вычисления по возможности лучше провестив Экселе – это намного удобнее и быстрее:

**Ответ**: с точностью до 0,001

Напоминаю, что эта фраза подразумевает тот факт, что мы ошиблись в оценке *истинного значения*корня не более чем на 0,001. Сомневающиеся могут взять в руки микрокалькулятор и ещё раз подставить приближенное значение 0,674 в левую часть уравнения .

А теперь «просканируем» правый столбец таблицы сверху вниз и обратим внимание, что значения  неуклонно убывают по модулю. Этот эффект называют *сходимостью* метода, которая позволяет нам вычислить корень со сколь угодно высокой точностью. Но сходимость имеет место далеко не всегда – она обеспечивается [**рядом условий**](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B5%D1%82%D0%BE%D0%B4_%D0%9D%D1%8C%D1%8E%D1%82%D0%BE%D0%BD%D0%B0), о которых я умолчал. В частности, отрезок, на котором изолируется корень, должен быть *достаточно мал* – в противном случае значения  будут меняться беспорядочным образом, и мы не сможем завершить алгоритм.

Что делать в таких случаях? Проверить выполнение указанных условий *(см. выше по ссылке)*, и при необходимости уменьшить отрезок. Так, условно говоря, если бы в разобранном примере нам не подошёл промежуток , то следовало бы рассмотреть, например, отрезок . **На практике мне такие случаи встречались**, и этот приём реально помогает! То же самое нужно сделать, если оба конца «широкого» отрезка не удовлетворяют условию  *(т.е. ни один из них не годится на роль начального приближения)*.

Но обычно всё работает, как часы, хотя и не без подводных камней:

Пример 2

Определить графически количество действительных корней уравнения  , отделить эти корни и применяя способ Ньютона, найти приближенные значения корней с точностью 



Условие задачи заметно ужесточилось: во-первых, в нём содержится толстый намёк на то, что уравнение имеет не единственный  корень, во-вторых, повысилось требование к точности, и, в-третьих, с графиком функции  совладать значительно труднее.

А поэтому **решение** начинаем со спасительного трюка: представим уравнение в виде   и изобразим графики :

Из чертежа следует, что наше уравнение имеет два действительных корня:


Алгоритм, как вы понимаете, нужно «провернуть» дважды. Но это ещё на самый тяжелый случай, бывает, исследовать приходится 3-4 корня.

1) С помощью критерия  выясним, какой из концов отрезка  выбрать в качестве начального приближения первого корня. Находим производные функции :


Тестируем левый конец отрезка:

 – подошёл!

Таким образом,  – начальное приближение.

Уточнение корня проведем методом Ньютона, используя рекуррентную формулу:
 – до тех пор, пока дробь [**по модулю**](http://www.mathprofi.ru/goryachie_formuly.pdf) не станет меньше требуемой точности: 

И здесь слово «модуль» приобретает неиллюзорную важность, поскольку значения  получаются отрицательными:

По этой же причине следует проявить повышенное внимание при переходе к каждому следующему приближению:


Несмотря на достаточно высокое требование к точности, процесс опять завершился на 2-м приближении: , следовательно:

 с точностью до 0,0001

2) Найдем приближённое значение корня .

Проверяем на «вшивость» левый конец отрезка:

, следовательно, он не годится в качестве начального приближения.

«Прозваниваем» правый конец:


Таким образом:  – начальное приближение.

Вычисления сведём в таблицу:

Здесь пришлось немножко постараться, правда, если выполнять вычисления в Экселе, то все «старания» займут доли секунды =)

, следовательно, итерации закончены:



**Ответ**: уравнение имеет два действительных корня:  с точностью до 0,001

Парочка примеров для самостоятельного решения. И даже не столько для решения, сколько для отработки техники вычислений – сам-то алгоритм весьма примитивен:

Пример 3

Отделить действительный корень уравнения  графически, и вычислить его приближенное значение методом касательных с точностью до 0,001



Пример 4

Определить количество действительных корней уравнения , отделить эти корни и применяя способ Ньютона, найти приближенные значения корней с точностью 

Заметьте, что в последнем задании явно не указано, каким способом мы должны изолировать корни, и, в принципе, можно попробовать обойтись чисто аналитическими выкладками, за которые по идее не должны покарать. Другое дело, что графический метод почти всегда проще.

Пожалуй, основные практически важные моменты я раскрыл, а посему статья плавно перетекает в решения и ответы, где можно ознакомиться с примерными образцами чистового оформления рассмотренной задачи:

*Пример 3****Решение****: представим уравнение в виде  и выполним чертёж:

Из чертежа следует, что 
Уточнение корня проведем методом Ньютона, используя формулу:
, где   – точность  шага.
Начальное приближение должно удовлетворять условию .

Проверим левый конец отрезка:

, таким образом  – начальное приближение.
Вычисления сведем в таблицу:

, следовательно, вычисления закончены.
****Ответ****:  с точностью до 0,001*

*Пример 4****Решение****: представим уравнение в виде  и изобразим графики функций :*

**

*
Из чертежа следует, что уравнение имеет два действительных корня, причём один из них известен точно , а другой 
Найдём корень приближённо, используя метод касательных и соответствующую рекуррентную формулу , где  – точность  шага.
Начальное приближение должно удовлетворять условию .

Очевидно, что левый конец отрезка не удовлетворяет указанному условию:

Проверяем правый конец

Таким образом  – начальное приближение.
Заполним расчётную таблицу:

, таким образом, требуемая точность достигнута:
****Ответ****:  с точностью до 0,0001.*

*Автор: Емелин Александр*