**Метод касательных1**

**Метод касательных** (метод Ньютона) предназначен для приближенного нахождения *нулей функции*, и сегодня мы не только узнаем его суть, но и научимся быстро решать тематическую задачу! В которой чаще всего фигурирует «обычная» [**функция одной переменной**](http://www.mathprofi.ru/mnozhestva.html) http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image002.gif и соответствующее [**уравнение**](http://www.mathprofi.ru/uravnenija_v_vysshei_matematike.html) http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image004.gif. Например:

http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image006.gif

Поставим задачу отыскать [**действительные**](http://www.mathprofi.ru/mnozhestva.html) корни данного уравнения.

А таковые точно есть! – из статей о [**графиках функций**](http://www.mathprofi.ru/grafiki_i_svoistva_funkcij.html) и [**уравнениях высшей математики**](http://www.mathprofi.ru/uravnenija_v_vysshei_matematike.html) вы хорошо знаете, что график *функции-многочлена*  *нечётной степени* хотя бы один раз пересекает ось http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image008.gif, следовательно, наше уравнение имеет *по меньшей мере* один действительный корень. Один. Или два. Или три.

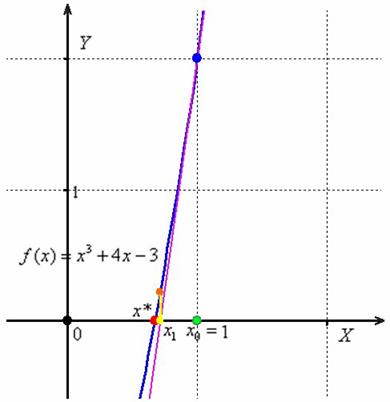
Сначала напрашивается проверить, наличие [**рациональных**](http://www.mathprofi.ru/mnozhestva.html) корней. Согласно [**соответствующей теореме**](http://www.mathprofi.ru/uravnenija_v_vysshei_matematike.html), на это «звание» могут претендовать лишь числа 1, –1, 3, –3, и прямой подстановкой легко убедиться, что ни одно из них «не подходит». Таким образом, остаются иррациональные значения. Иррациональный корень (корни) многочлена 3-й степени можно найти точно *(выразить через радикалы)* с помощью так называемых [***формул Кардано***](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D0%BE%D1%80%D0%BC%D1%83%D0%BB%D0%B0_%D0%9A%D0%B0%D1%80%D0%B4%D0%B0%D0%BD%D0%BE), однако этот метод достаточно громоздок. А для многочленов 5-й и бОльших степеней общего аналитического метода не существует вовсе, и, кроме того, на практике встречается множество других уравнений, в которых точные значения действительных корней получить невозможно (хотя они существуют).

Однако в прикладных *(например, инженерных)* задачах более чем допустимо использовать приближённые значения, вычисленные с определённой точностью.

Зададим для нашего примера точность http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image010.gif. Что это значит? Это значит, что нам нужно отыскать ТАКОЕ приближённое значение корня  *(корней)*, в котором мы гарантированно ошибаемся, не более чем на 0,001 *(одну тысячную)*.

Совершенно понятно, что решение нельзя начинать «наобум» и поэтому на первом шаге корни **отделяют**. Отделить корень – это значит найти достаточно малый (как правило, единичный) отрезок, которому этот корень принадлежит, и на котором нет других корней. Наиболее прост и доступен **графический метод отделения корней**. Построим **[поточечно](http://www.mathprofi.ru/grafiki_i_svoistva_funkcij.html)** график функции http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image012.gif:  
****  
Из чертежа следует, что уравнение http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image006_0000.gif, судя по всему, имеет единственный действительный корень http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image016.gif, принадлежащий отрезку http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image018.gif. На концах данного промежутка функция http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image012_0000.gif принимает значения разных знаков: http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image021.gif, и из факта [**непрерывности функции на отрезке**](http://www.mathprofi.ru/nepreryvnost_funkcii_i_tochki_razryva.html) сразу виден элементарный способ уточнения корня: делим промежуток http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image018_0000.gif пополам  и выбираем тот отрезок, на концах которого функция принимает разные знаки. В данном случае это, очевидно, отрезок http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image024.gif. Делим полученный промежуток пополам и снова выбираем «разнознаковый» отрезок. И так далее. Подобные последовательные действия называют *итерациями*.  В данном случае их следует проводить до тех пор, пока длина отрезка не станет меньше удвоенной точности вычислений http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image026.gif, и за приближённое значение корня следует выбрать середину последнего «разнознакового» отрезка.

Рассмотренная схема получила естественное название – **метод половинного деления**. И недостаток этого метода состоит в скорости. Медленно. Очень медленно. Слишком много итераций придётся совершить, прежде чем мы достигнем требуемой точности. С развитием вычислительной техники это, конечно, не проблема, но математика – на то и математика, чтобы искать наиболее рациональные пути решения.

И одним из более эффективных способов нахождения приближённого значения корня как раз и является **метод касательных**. Краткая геометрическая суть метода состоит в следующем: сначала с помощью специального критерия *(о котором чуть позже)* выбирается один из концов отрезка. Этот конец называют *начальным* приближением корня, в нашем примере: http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image028.gif. Теперь проводим касательную к графику функции http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image012_0001.gif в точке с абсциссой http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image028_0000.gif *(синяя точка и фиолетовая касательная)*:  
****  
Данная касательная пересекла ось абсцисс в жёлтой точке, и обратите внимание, что на первом шаге мы уже почти «попали в корень»! Это будет *первое* приближение корня http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image032.gif. Далее опускаем жёлтый перпендикуляр к графику функции и «попадаем» в оранжевую точку. Через оранжевую точку снова проводим касательную, которая пересечёт ось ещё ближе к корню! И так далее. Нетрудно понять, что, используя метод касательных, мы приближаемся к цели семимильными шагами, и для достижения точности http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image010_0000.gif потребуется буквально несколько итераций.

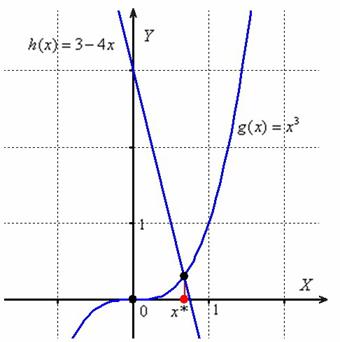
Поскольку касательная определяется через [**производную функции**](http://www.mathprofi.ru/opredelenie_proizvodnoi_smysl_proizvodnoi.html), то этот урок попал в раздел «Производные» в качестве одного из её приложений. И, не вдаваясь в подробное [**теоретическое обоснование метода**](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B5%D1%82%D0%BE%D0%B4_%D0%9D%D1%8C%D1%8E%D1%82%D0%BE%D0%BD%D0%B0), я рассмотрю техническую сторону вопроса. На практике описанная выше задача встречается примерно в такой формулировке:

Пример 1

С помощью графического метода найти промежуток http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image034.gif, на котором находится действительный корень http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image016_0000.gif уравнения http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image036.gif. Пользуясь методом Ньютона, получить приближенное значение корня с точностью до 0,001

Перед вами «щадящая версия» задания, в которой сразу констатируется наличие единственного действительного корня.

**Решение**: **на первом шаге** следует отделить корень графически. Это можно сделать путём построения графика http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image012_0002.gif *(см. иллюстрации выше)*, но такой подход обладает рядом недостатков. Во-первых, не факт, что график прост *(мы же заранее не знаем)*, а программное обеспечение – оно далеко не всегда под рукой. И, во-вторых *(следствие из 1-го)*, с немалой вероятностью получится даже не схематичный чертёж, а грубый рисунок, что, разумеется, не есть хорошо.

Ну а зачем нам лишние трудности? Представим[**уравнение**](http://www.mathprofi.ru/uravnenija_v_vysshei_matematike.html) http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image036_0000.gif в виде http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image038.gif, АККУРАТНО построим графики http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image040.gif и отметим на чертеже корень http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image016_0001.gif *(«иксовую» координату точки пересечения графиков)*:  
****  
Очевидное преимущество [**этого способа**](http://www.mathprofi.ru/uravnenija_v_vysshei_matematike.html) состоит в том, что графики данных функций строятся от руки значительно точнее и намного быстрее. Кстати, заметьте, что [**прямая**](http://www.mathprofi.ru/uravnenie_pryamoi_na_ploskosti.html) пересекла [**кубическую параболу**](http://www.mathprofi.ru/grafiki_i_svoistva_funkcij.html) в единственной точке, а значит, предложенное уравнение и в самом деле имеет только один действительный корень. Доверяйте, но проверяйте ;-)

Итак, наш «клиент» http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image016_0002.gif принадлежит отрезку http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image044.gif и «на глазок» примерно равен 0,65-0,7.

**На втором шаге** нужно выбрать *начальное приближение* http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image046.gif корня. Обычно это один из концов отрезка. Начальное приближение должно удовлетворять следующему условию:  
http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image048.gif

Найдём[**первую**](http://www.mathprofi.ru/kak_naiti_proizvodnuju.html) и [**вторую**](http://www.mathprofi.ru/tipovye_zadachi_s_proizvodnoi.html) производные функции http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image012_0003.gif:  
http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image050.gif

и проверим левый конец отрезка:  
http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image052.gif  
Таким образом, ноль «не подошёл».

Проверяем правый конец отрезка:  
http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image054.gif  
http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image056.gif – всё хорошо!  В качестве начального приближения выбираем http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image028_0001.gif.

**На третьем шаге** нас ожидает дорога к корню. Каждое последующее приближение  корня http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image059.gif рассчитывается на основании предшествующих данных с помощью следующей *рекуррентной* формулы:  
http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image061.gif

Процесс завершается при выполнении условия http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image063.gif, где http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image065.gif – заранее заданная точность вычислений. В результате за приближённое значение корня принимается «энное» приближение: http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image067.gif.

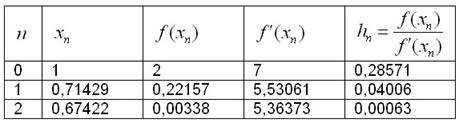
На очереди рутинные расчёты:  
http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image069.gif  
http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image071.gif *(округление обычно проводят до 5-6 знаков после запятой)*

Поскольку полученное значение больше http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image010_0001.gif, то переходим к 1-му приближению корня:  
http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image074.gif

Вычисляем:  
http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image076.gif  
http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image078.gif, поэтому возникает потребность перейти ко 2-му приближению:  
http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image080.gif

Заходим на следующий круг:  
http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image082.gif  
http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image084.gif, таким образом, итерации закончены, и в качестве приближённого значения корня следует взять 2-е приближение, которое в соответствии с заданной точностью нужно округлить до одной тысячной:

http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image086.gif

На практике результаты вычислений удобно заносить в таблицу, при этом, чтобы несколько сократить запись, дробь часто обозначают через http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image088.gif:  


Сами же вычисления по возможности лучше провестив Экселе – это намного удобнее и быстрее:

**Ответ**:http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image092.gif с точностью до 0,001

Напоминаю, что эта фраза подразумевает тот факт, что мы ошиблись в оценке *истинного значения*корня не более чем на 0,001. Сомневающиеся могут взять в руки микрокалькулятор и ещё раз подставить приближенное значение 0,674 в левую часть уравнения http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image036_0001.gif.

А теперь «просканируем» правый столбец таблицы сверху вниз и обратим внимание, что значения http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image094.gif неуклонно убывают по модулю. Этот эффект называют *сходимостью* метода, которая позволяет нам вычислить корень со сколь угодно высокой точностью. Но сходимость имеет место далеко не всегда – она обеспечивается [**рядом условий**](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B5%D1%82%D0%BE%D0%B4_%D0%9D%D1%8C%D1%8E%D1%82%D0%BE%D0%BD%D0%B0), о которых я умолчал. В частности, отрезок, на котором изолируется корень, должен быть *достаточно мал* – в противном случае значения http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image096.gif будут меняться беспорядочным образом, и мы не сможем завершить алгоритм.

Что делать в таких случаях? Проверить выполнение указанных условий *(см. выше по ссылке)*, и при необходимости уменьшить отрезок. Так, условно говоря, если бы в разобранном примере нам не подошёл промежуток http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image098.gif, то следовало бы рассмотреть, например, отрезок http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image100.gif. **На практике мне такие случаи встречались**, и этот приём реально помогает! То же самое нужно сделать, если оба конца «широкого» отрезка не удовлетворяют условию http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image048_0000.gif *(т.е. ни один из них не годится на роль начального приближения)*.

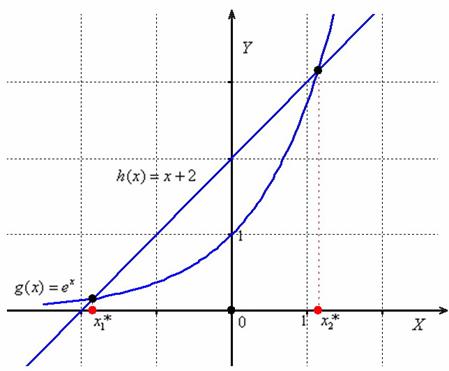
Но обычно всё работает, как часы, хотя и не без подводных камней:

Пример 2

Определить графически количество действительных корней уравнения  http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image102.gif, отделить эти корни и применяя способ Ньютона, найти приближенные значения корней с точностью http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image104.gif

http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image106.gif

Условие задачи заметно ужесточилось: во-первых, в нём содержится толстый намёк на то, что уравнение имеет не единственный  корень, во-вторых, повысилось требование к точности, и, в-третьих, с графиком функции http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image108.gif совладать значительно труднее.

А поэтому **решение** начинаем со спасительного трюка: представим уравнение в виде  http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image110.gif и изобразим графики http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image112.gif:  
  
Из чертежа следует, что наше уравнение имеет два действительных корня:  
http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image116.gif

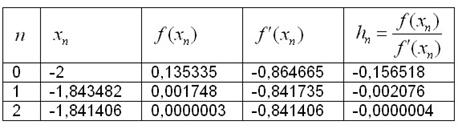
Алгоритм, как вы понимаете, нужно «провернуть» дважды. Но это ещё на самый тяжелый случай, бывает, исследовать приходится 3-4 корня.

1) С помощью критерия http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image048_0001.gif выясним, какой из концов отрезка http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image118.gif выбрать в качестве начального приближения первого корня. Находим производные функции http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image108_0000.gif:  
http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image121.gif

Тестируем левый конец отрезка:  
http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image123.gif  
http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image125.gif – подошёл!

Таким образом, http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image127.gif – начальное приближение.

Уточнение корня проведем методом Ньютона, используя рекуррентную формулу:  
http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image129.gif – до тех пор, пока дробь [**по модулю**](http://www.mathprofi.ru/goryachie_formuly.pdf) не станет меньше требуемой точности: http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image131.gif

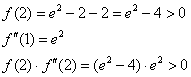
И здесь слово «модуль» приобретает неиллюзорную важность, поскольку значения http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image096_0000.gif получаются отрицательными:  
  
По этой же причине следует проявить повышенное внимание при переходе к каждому следующему приближению:  
http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image136.gif

Несмотря на достаточно высокое требование к точности, процесс опять завершился на 2-м приближении: http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image138.gif, следовательно:

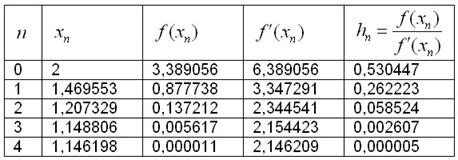
http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image140.gif с точностью до 0,0001

2) Найдем приближённое значение корня http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image142.gif.

Проверяем на «вшивость» левый конец отрезка:  
http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image144.gif  
http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image146.gif, следовательно, он не годится в качестве начального приближения.

«Прозваниваем» правый конец:  


Таким образом: http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image150.gif – начальное приближение.

Вычисления сведём в таблицу:  
  
Здесь пришлось немножко постараться, правда, если выполнять вычисления в Экселе, то все «старания» займут доли секунды =)

http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image154.gif, следовательно, итерации закончены:

http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image156.gif

**Ответ**: уравнение имеет два действительных корня: http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image158.gif с точностью до 0,001

Парочка примеров для самостоятельного решения. И даже не столько для решения, сколько для отработки техники вычислений – сам-то алгоритм весьма примитивен:

Пример 3

Отделить действительный корень уравнения http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image102_0000.gif графически, и вычислить его приближенное значение методом касательных с точностью до 0,001

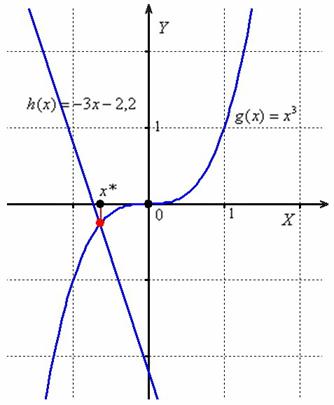
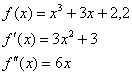
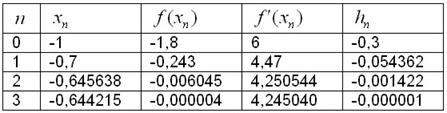
http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image160.gif

Пример 4

Определить количество действительных корней уравнения http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image162.gif, отделить эти корни и применяя способ Ньютона, найти приближенные значения корней с точностью http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image104_0000.gif

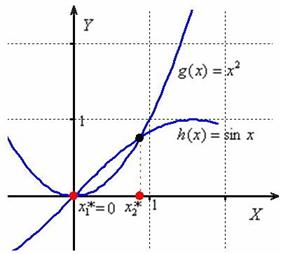
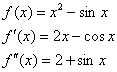
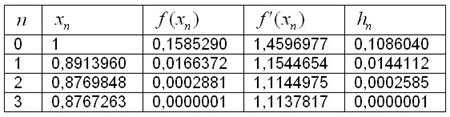
Заметьте, что в последнем задании явно не указано, каким способом мы должны изолировать корни, и, в принципе, можно попробовать обойтись чисто аналитическими выкладками, за которые по идее не должны покарать. Другое дело, что графический метод почти всегда проще.

Пожалуй, основные практически важные моменты я раскрыл, а посему статья плавно перетекает в решения и ответы, где можно ознакомиться с примерными образцами чистового оформления рассмотренной задачи:

*Пример 3****Решение****: представим уравнение в виде http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image164.gif и выполним чертёж:  
  
Из чертежа следует, что http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image168.gif  
Уточнение корня проведем методом Ньютона, используя формулу:  
http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image170.gif, где http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image094_0000.gif  – точность http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image173.gif шага.  
Начальное приближение должно удовлетворять условию http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image048_0002.gif.  
  
Проверим левый конец отрезка:  
http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image177.gif  
http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image179.gif, таким образом http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image181.gif – начальное приближение.  
Вычисления сведем в таблицу:  
  
http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image185.gif, следовательно, вычисления закончены.  
http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image187.gif****Ответ****: http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image189.gif с точностью до 0,001*

*Пример 4****Решение****: представим уравнение в виде http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image191.gif и изобразим графики функций http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image193.gif:*

*http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image195.gif*

*  
Из чертежа следует, что уравнение имеет два действительных корня, причём один из них известен точно http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image199.gif, а другой http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image201.gif  
Найдём корень приближённо, используя метод касательных и соответствующую рекуррентную формулу http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image061_0000.gif, где http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image204.gif – точность http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image173_0000.gif шага.  
Начальное приближение должно удовлетворять условию http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image048_0003.gif.  
  
Очевидно, что левый конец отрезка не удовлетворяет указанному условию:  
http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image209.gif   
Проверяем правый конец  
http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image211.gif  
Таким образом http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image028_0002.gif – начальное приближение.  
Заполним расчётную таблицу:  
  
http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image216.gif, таким образом, требуемая точность достигнута:  
http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image218.gif****Ответ****: http://www.mathprofi.ru/b/metod_kasatelnyh_clip_image220.gif с точностью до 0,0001.*

*Автор: Емелин Александр*