**Тема 7 Численные методы решения задач Коши**

**Численные методы решения дифференциальных уравнений. Метод Эйлера.**

Цели занятия

1. обучающая:
   * повторение основных понятий изученных по дисциплине «Высшая математика» по теме «Дифференциальные исчисления»: дифференциальное уравнение, порядок дифференциального уравнения, обыкновенное дифференциальное уравнение, решение дифференциального уравнения, формулировка задачи Коши;
   * изучение метода Эйлера для решения дифференциальных уравнений;
   * показать использование информационных технологий при решении дифференциальных уравнений;
   * показать практические применение полученных знаний в различных дисциплинах специальности: основы алгоритмизации и программирования, информационные технологии;
   * осуществить контроль за качеством усвоения полученных знаний по изученному материалу;

- сформировать умение осуществлять перенос знаний в измененную ситуацию.

1. развивающая:
   * сформировать целостную естественно научную картину специальности через предметные связи математики, информационных технологии и основ алгоритмизации и программирования;
   * сформировать умение видеть применение абстрактных математических понятий, в частности, математических уравнений, в других предметных областях;
   * развитие умения анализировать, обобщать и систематизировать материал, выделять главное из изучаемого материала;
   * развитие познавательного интереса и творческих способностей студентов при создании новых программных продуктов.
2. воспитательная:

- воспитать уверенность в своих силах, самостоятельность при выполнении вычислений.

1. методическая:
   * показать возможности использования информационных технологий;.

- показать особенности реализации межпредметного обобщения материала.

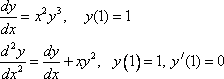
Многие задачи науки и техники сводятся к решению обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). ОДУ называются такие уравнения, которые содержат одну или несколько производных от искомой функции. В общем виде ОДУ можно записать следующим образом:

https://studfile.net/html/2706/1193/html_8kuP4f9TEC.ZAjd/img-FLLBnx.png, где x – независимая переменная, https://studfile.net/html/2706/1193/html_8kuP4f9TEC.ZAjd/img-_vD3gW.png - i-ая производная от искомой функции. n - порядок уравнения. Общее решение ОДУ n–го порядка содержит n произвольных постоянных https://studfile.net/html/2706/1193/html_8kuP4f9TEC.ZAjd/img-wCY7_H.png, т.е. общее решение имеет вид https://studfile.net/html/2706/1193/html_8kuP4f9TEC.ZAjd/img-GIMAGz.png.

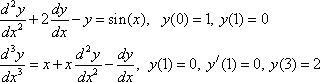
Для выделения единственного решения необходимо задать n дополнительных условий. В зависимости от способа задания дополнительных условий существуют два различных типа задач: задача Коши и краевая задача. **Если дополнительные условия задаются в одной точке, то такая задача называется задачей Коши**. Дополнительные условия в задаче Коши называются начальными условиями. Если же дополнительные условия задаются в более чем одной точке, т.е. при различных значениях независимой переменной, то такая задача называется краевой. Сами дополнительные условия называются краевыми или граничными.

Ясно, что при n=1 можно говорить только о задачи Коши.

**Примеры постановки задачи Коши**:



**Примеры краевых задач**:



Решить такие задачи аналитически удается лишь для некоторых специальных типов уравнений.

**Численные методы решения задачи Коши для ОДУ первого порядка**

**Постановка задачи**. Найти решение ОДУ первого порядка

https://studfile.net/html/2706/1193/html_8kuP4f9TEC.ZAjd/img-tqxA0h.png на отрезке https://studfile.net/html/2706/1193/html_8kuP4f9TEC.ZAjd/img-JipiuB.png при условии https://studfile.net/html/2706/1193/html_8kuP4f9TEC.ZAjd/img-NOJOl4.png

При нахождении приближенного решения будем считать, что вычисления проводятся с расчетным шагом https://studfile.net/html/2706/1193/html_8kuP4f9TEC.ZAjd/img-voy6MS.png, расчетными узлами служат точки https://studfile.net/html/2706/1193/html_8kuP4f9TEC.ZAjd/img-JvsSFV.png промежутка [*x*0*, xn*].

Целью является построение таблицы

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *xi* | *x*0 | *x*1 | … | *xn* |
| *yi* | *y*0 | *y*1 | … | *yn* |

т.е. ищутся приближенные значения y в узлах сетки.

Интегрируя уравнение на отрезке https://studfile.net/html/2706/1193/html_8kuP4f9TEC.ZAjd/img-TJQCPh.png, получим

https://studfile.net/html/2706/1193/html_8kuP4f9TEC.ZAjd/img-ZoksXB.png

Вполне естественным (но не единственным) путем получения численного решения является замена в нем интеграла какой–либо квадратурной формулой численного интегрирования. Если воспользоваться простейшей формулой левых прямоугольников первого порядка

https://studfile.net/html/2706/1193/html_8kuP4f9TEC.ZAjd/img-fE81lX.png,

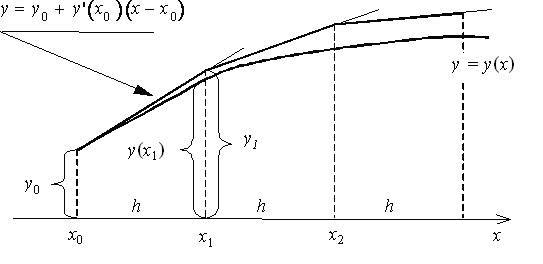
то получим **явную формулу Эйлера**:

https://studfile.net/html/2706/1193/html_8kuP4f9TEC.ZAjd/img-5yL5QO.png, https://studfile.net/html/2706/1193/html_8kuP4f9TEC.ZAjd/img-KNhiIB.png.

Порядок расчетов:

Зная https://studfile.net/html/2706/1193/html_8kuP4f9TEC.ZAjd/img-ZoQ7hW.png, находим https://studfile.net/html/2706/1193/html_8kuP4f9TEC.ZAjd/img-jGPUZV.png, затем https://studfile.net/html/2706/1193/html_8kuP4f9TEC.ZAjd/img-LsaQMZ.png т.д.

С геометрической точки зрения, при вычислении по формуле (2) на каждом элементарном участке http://files.lib.sfu-kras.ru/ebibl/umkd/77/u_course/Math/Glava06/3/3.7.files/image104.gif график решения заменяется отрезком прямой с угловым коэффициентом http://files.lib.sfu-kras.ru/ebibl/umkd/77/u_course/Math/Glava06/3/3.7.files/image105.gif. В результате получается ломаная, которая называется **ломаной Эйлера**

****

Задание

Найти частное решение дифференциального уравнения http://www.mathprofi.ru/b/metody_eilera_i_runge_kutty_clip_image011.gif, соответствующее начальному условию http://www.mathprofi.ru/b/metody_eilera_i_runge_kutty_clip_image013.gif, методом Эйлера на отрезке http://www.mathprofi.ru/b/metody_eilera_i_runge_kutty_clip_image015.gif с шагом http://www.mathprofi.ru/b/metody_eilera_i_runge_kutty_clip_image017.gif. Построить таблицу и график приближённого решения.

Разбираемся. Во-первых, перед нами обычное [**линейное уравнение**](http://www.mathprofi.ru/lineinye_differencialnye_uravnenija.html), которое можно решить стандартными способами, и поэтому очень трудно устоять перед соблазном сразу же найти точное решение:

http://www.mathprofi.ru/b/metody_eilera_i_runge_kutty_clip_image019.gif – желающие могут выполнить проверку и убедиться, что данная функция удовлетворяет начальному условию http://www.mathprofi.ru/b/metody_eilera_i_runge_kutty_clip_image013_0000.gif и является корнем уравнения http://www.mathprofi.ru/b/metody_eilera_i_runge_kutty_clip_image011_0000.gif.

Что нужно сделать? Нужно найти и построить *ломаную*, которая приближает график функции http://www.mathprofi.ru/b/metody_eilera_i_runge_kutty_clip_image019_0000.gif на промежутке http://www.mathprofi.ru/b/metody_eilera_i_runge_kutty_clip_image015_0000.gif. Поскольку длина этого промежутка равна единице, а шаг составляет http://www.mathprofi.ru/b/metody_eilera_i_runge_kutty_clip_image017_0000.gif, то наша *ломаная* будет состоять из 10 отрезков:  
http://www.mathprofi.ru/b/metody_eilera_i_runge_kutty_clip_image023.gif

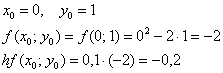
причём, точка http://www.mathprofi.ru/b/metody_eilera_i_runge_kutty_clip_image025.gif уже известна – она соответствует начальному условию http://www.mathprofi.ru/b/metody_eilera_i_runge_kutty_clip_image013_0001.gif. Кроме того, очевидны «иксовые» координаты  других точек:  
http://www.mathprofi.ru/b/metody_eilera_i_runge_kutty_clip_image027.gif

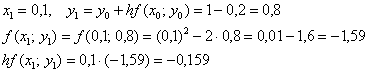
Осталось найти http://www.mathprofi.ru/b/metody_eilera_i_runge_kutty_clip_image029.gif.

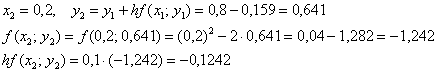
! Каждое следующее «игрековое» значение получается из предыдущего по простой *рекуррентной* формуле:  
http://www.mathprofi.ru/b/metody_eilera_i_runge_kutty_clip_image031.gif

Представим дифференциальное уравнение http://www.mathprofi.ru/b/metody_eilera_i_runge_kutty_clip_image011_0001.gif в виде http://www.mathprofi.ru/b/metody_eilera_i_runge_kutty_clip_image002_0001.gif:  
http://www.mathprofi.ru/b/metody_eilera_i_runge_kutty_clip_image034.gif

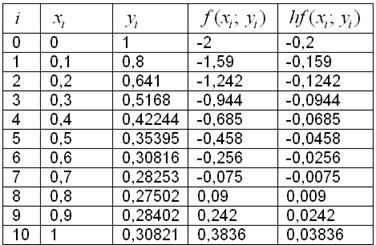
Таким образом: http://www.mathprofi.ru/b/metody_eilera_i_runge_kutty_clip_image036.gif

«Раскручиваемся» от начального условия http://www.mathprofi.ru/b/metody_eilera_i_runge_kutty_clip_image013_0002.gif:  


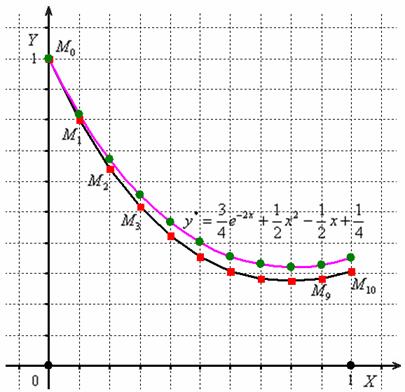
вычисляем:  




http://www.mathprofi.ru/b/metody_eilera_i_runge_kutty_clip_image044.gif  
и так далее – до победного конца.

Результаты вычислений удобно заносить в таблицу:  


А сами вычисления автоматизировать в Экселе – потому что в математике важен не только победный, но ещё и быстрый конец:)

По результатам 2-го и 3-го столбцов изобразим на чертеже 11 точек http://www.mathprofi.ru/b/metody_eilera_i_runge_kutty_clip_image048.gif и 10 отрезков, соединяющих смежные точки.  Для сравнения я построю график точного частного решения http://www.mathprofi.ru/b/metody_eilera_i_runge_kutty_clip_image019_0001.gif:  
  
Существенным недостатком простого метода Эйлера является слишком большая погрешность, при этом легко заметить, что погрешность имеет тенденцию накапливаться – чем дальше мы уходим от точки http://www.mathprofi.ru/b/metody_eilera_i_runge_kutty_clip_image052.gif, тем *преимущественно* больше становится расхождение между приближением и истиной. Это объяснимо самим принципом, который Эйлер положил в основу своего метода: отрезки http://www.mathprofi.ru/b/metody_eilera_i_runge_kutty_clip_image023_0000.gif параллельны *соответствующим* [***касательным***](http://www.mathprofi.ru/opredelenie_proizvodnoi_smysl_proizvodnoi.html) к графику функции http://www.mathprofi.ru/b/metody_eilera_i_runge_kutty_clip_image006_0002.gif в точках http://www.mathprofi.ru/b/metody_eilera_i_runge_kutty_clip_image054.gif. Данный факт, кстати, тоже хорошо просматривается по чертежу.

Как можно улучшить приближение? Первая мысль – измельчить разбиение. Разделим отрезок http://www.mathprofi.ru/b/metody_eilera_i_runge_kutty_clip_image015_0001.gif, например, на 20 частей. Тогда шаг составит: http://www.mathprofi.ru/b/metody_eilera_i_runge_kutty_clip_image056.gif, и совершенно понятно, что ломаная из 20 звеньев заметно точнее приблизит частное решение. С помощью того же Экселя не составит труда обработать 100-1000 и даже миллион (!) промежуточных отрезков, однако зададимся вопросом: а нельзя ли КАЧЕСТВЕННО улучшить метод?

**Пример**.

Методом Эйлера для уравнения http://files.lib.sfu-kras.ru/ebibl/umkd/77/u_course/Math/Glava06/3/3.7.files/image106.gif найти http://files.lib.sfu-kras.ru/ebibl/umkd/77/u_course/Math/Glava06/3/3.7.files/image107.gif, если http://files.lib.sfu-kras.ru/ebibl/umkd/77/u_course/Math/Glava06/3/3.7.files/image108.gif; выбрать http://files.lib.sfu-kras.ru/ebibl/umkd/77/u_course/Math/Glava06/3/3.7.files/image109.gif. Для расчетов по формуле (2) составим таблицу.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| http://files.lib.sfu-kras.ru/ebibl/umkd/77/u_course/Math/Glava06/3/3.7.files/image110.gif | http://files.lib.sfu-kras.ru/ebibl/umkd/77/u_course/Math/Glava06/3/3.7.files/image111.gif | http://files.lib.sfu-kras.ru/ebibl/umkd/77/u_course/Math/Glava06/3/3.7.files/image112.gif | http://files.lib.sfu-kras.ru/ebibl/umkd/77/u_course/Math/Glava06/3/3.7.files/image113.gif |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0,1 | 1+0=1 | 0,020 |
| 2 | 0,2 | 1+0,020=1,020 | 0,041 |
| 3 | 0,3 | 1,020+0,041=1,061 | 0,064 |
| 4 | 0,4 | 1,061+0,064=1,125 | 0,090 |
| 5 | 0,5 | 1,125+0,090=1,215 | 0,121 |
| 6 | 0,6 | 1,215+0,121=1,336 | 0,160 |
| 7 | 0,7 | 1,336+0,160=1,496 | 0,209 |
| 8 | 0,8 | 1,496+0,209=1,705 | 0,273 |
| 9 | 0,9 | 1,705+0,273=1,978 | 0,357 |
| 10 | 1,0 | 1,978+0,357=2,335 |  |

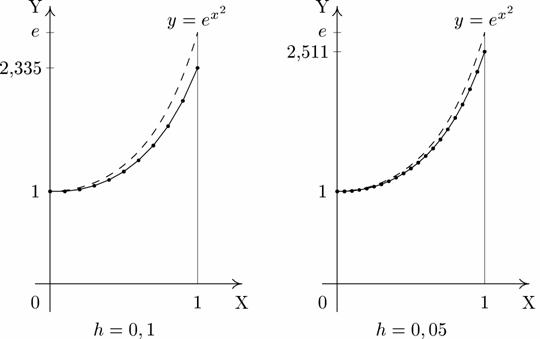
         Итак, http://files.lib.sfu-kras.ru/ebibl/umkd/77/u_course/Math/Glava06/3/3.7.files/image114.gif. Найдем точное решение задачи и сравним полученные результаты:

http://files.lib.sfu-kras.ru/ebibl/umkd/77/u_course/Math/Glava06/3/3.7.files/image115.gif

http://files.lib.sfu-kras.ru/ebibl/umkd/77/u_course/Math/Glava06/3/3.7.files/image116.gif

решение задачи – функция http://files.lib.sfu-kras.ru/ebibl/umkd/77/u_course/Math/Glava06/3/3.7.files/image117.gif, получаем http://files.lib.sfu-kras.ru/ebibl/umkd/77/u_course/Math/Glava06/3/3.7.files/image118.gif. Как видим, погрешность вычисления 2,718–2,335=0,383 довольно велика, но уменьшение величины http://files.lib.sfu-kras.ru/ebibl/umkd/77/u_course/Math/Glava06/3/3.7.files/image119.gif позволяет добиться лучших результатов.

         Для сравнения изобразим интегральную кривую и ломаные Эйлера для http://files.lib.sfu-kras.ru/ebibl/umkd/77/u_course/Math/Glava06/3/3.7.files/image109.gif и http://files.lib.sfu-kras.ru/ebibl/umkd/77/u_course/Math/Glava06/3/3.7.files/image120.gif (для наглядности выбраны разные масштабы по координатным осям).



         Метод Эйлера является простейшим из приближенных методов решения дифференциальных уравнений. На практике чаще используется, например, **метод Рунге–Кутта**.

**Пример**. Решить задачу Коши:

https://studfile.net/html/2706/1193/html_8kuP4f9TEC.ZAjd/img-MUd5zf.png.

Точное решение: https://studfile.net/html/2706/1193/html_8kuP4f9TEC.ZAjd/img-Rl1wQa.png

Расчетные формулы по явному методу Эйлера для данного примера:

https://studfile.net/html/2706/1193/html_8kuP4f9TEC.ZAjd/img-oIHmDY.png