**Лекция.**

**Тема занятия:** Численное интегрирование по **формуле Симпсона.**

Цель занятия: Познакомить со способами представления функции в виде прямоугольников и трапеций. Научить вычислять интегралы по формулам прямоугольников, трапеций и формуле Симпсона.

**Предварительные соображения.**

Из курса математического анализа известно, что существуют неопределённые интегралы, не выражающиеся в элементарных функциях – так называемые не берущиеся интегралы. Таким, например, является интеграл . Поэтому, очевидно, в некоторых случаях невозможно вычисление определённого интеграла с помощью формулы Ньютона-Лейбница , так как нельзя найти первообразную подынтегральной функции . В то же время существование такого интеграла обусловлено непрерывностью функции  на отрезке . В таких случаях прибегают к численным методам интегрирования.

Разумеется, вычислить определённый интеграл можно, непосредственно пользуясь его определением, как предел интегральных сумм:, где - число отрезков разбиения (частичных отрезков), - некоторые точки, произвольно выбранные на каждом из отрезков,  - длина одного частичного отрезка. Однако такой способ, во-первых, достаточно громоздок, во вторых, обычно даёт результаты приемлемой точности только при больших значениях .

Чаще всего формулы приближённого вычисления определённого интеграла вытекают из его геометрического смысла. Следовательно, задача о приближённом вычислении определённого интеграла заменяется другой, равносильной ей – задачей о вычислении площади криволинейной трапеции. При этом кривая  заменяется другой линией, достаточно близкой к ней. В качестве этой новой линии выбирается такая кривая, для которой площадь криволинейной трапеции подсчитывается просто, то есть для которой можно легко найти первообразную. В зависимости от выбора этой кривой и различаются формулы численного интегрирования.

Предположим сначала для определённости, что  для всех . Разобьём отрезок  на  равных частей точками . Длина каждого отрезка равна . Через точки деления проведём вертикальные прямые, которые пересекут линию  в точках .

**10.4. Формула Симпсона.**

Для случаев, когда количество точек разбиения  чётно, то есть , удобно использовать так называемую *формулу Симпсона* (параболических трапеций).

Примем её без вывода:

.

Напомним, что здесь .

Оценка ошибки при вычислении определённого интеграла методом Симпсона:

,

где  - наибольшее значение производной четвёртого порядка подынтегральной функции на отрезке интегрирования.

**Пример 3.** В условиях примеров 1 и 2 найти приближённое значение  методом Симпсона. Оценить ошибку; сравнить полученное значение с точным.

**Решение.** Воспользуемся таблицей значений, которую мы применяли в предыдущих примерах.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *х* | 0,0 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 1,0 |
| *у* | 1,0 | 1,10517 | 1,2214 | 1,34986 | 1,49282 | 1,64872 | 1,82212 | 2,01375 | 2,22554 | 2,45960 | 2,71828 |

Подставим соответствующие значения в формулу (7):

(здесь )

При расчёте по данной формуле получили все 5 верных цифр после запятой. Таким образом, в одинаковых начальных условиях метод Симпсона даёт наибольшую точность приближённых вычислений определённого интеграла.

**Задание.**

Найти приближённые значения следующих определённых интегралов. Оценить ошибку вычисления и сравнить с точным значением. Вычисления вести с пятью знаками после запятой.

1)  - методом Симпсона.

2)  - методом трапеций и методом Симпсона.